

試して 納得！

# わかる デジタル信号処理 設計編

東京電機大学教授 工学博士 三谷政昭 著

最初から始める

続きから始める





## 【試して納得！】シリーズ刊行にあたって

デジタル信号処理 (DSP: Digital Signal Processing) 技術は、通信や音声&画像処理、制御、計測などの多彩な分野で当たり前のように使用される要素技術なので、今こそ、この技術をしっかりと使いこなせる専門家が求められています。

最近、学生や社会人の方々から、「DSPの基本的な原理を体系的にまとめた解説書があれば助かるのになあ」という声をよく耳にします。そんな声にお応えすべく、DSPの基本を体系的にまとめ、徹底してわかりやすく、インタラクティブ (Interactive, 対話的) にシミュレーション (Simulation) しながら、「楽しく読めて、目で見て、直感的にわかる」ソフトを世に出したいものだとか常々考えていました。

ところで、2005年9月に発刊した電子回路向け【楽しく学ぶ】シリーズは、「Interactive Simulation Book」略して『IS Book (アイエス・ブックと読む)』と称するソフトであり、世界で初めてのシミュレータ内蔵「電子教科書&参考書」です。そこで、電子回路向けの【楽しく学ぶ】シリーズのコンセプトを踏襲し、DSP解説書の実現に向けて、新たなシミュレーション・ソフトとして、【DSPシミュレータ・ソフト「商品名DSPアナライザ (DspAnalyzer)」】が開発されました。そうして、株式会社マイクロネット (浜三弘 社長) との産学連携により、DSPシミュレータを内蔵した『IS Book』として、新シリーズ【試して納得！】の発刊にこぎつけた次第です。

少々手前みそですが、DSPがどんなものなのかをすばやく知って、即座に活用するための“特効薬”となるように、「今日から使える、使いこなす、使いこなせる」ための基礎を小気味よく解説してあります。

「開けてビックリ!! 玉手箱」じゃあないけれど、本シリーズのテキスト (CD-ROM) をパソコンに突っ込んで、スイッチオン。すると、どうでしょう。仕掛け絵本のように、回路図、回路部品、工作道具、オシロスコープなどが飛び出してきました。そうして、テキストの説明を読みながら、DSPのリアルタイム・シミュレーション実験が体感できて、基礎から応用までを習得できるように、数多くの工夫が凝らしてあります。

### (1) 数式の使用をできるだけ避けること


数式は一つの言葉なので、物理的なイメージと結びつけることが大切です。た

だやみくもに数式を暗記するだけでは、内容がさっぱりわからないというジレンマに陥ってしまいます (いわゆる、「理数離れ」症候群)。そのため、数式の表現力に頼ることをできるだけ避けて、数式を物理的な言葉で“翻訳”した表現を心がけ、みなさんの「数式に対するアレルギー」を取り去ってまいります。そうして、直感的な理解、イメージをみなさんに植え付けます。なぜなら、物の本質の理解には順序だった (何?) 理屈も大切ですが、これ以上に重要なものは「直感的な理解、イメージ」なので (筆者の経験から言えることですが...)。

### (2) 説明の順序を理解しやすい並びにすること

みなさんの理解しやすいことを目標に、いままでのDSPの参考書にありがちな内容説明の流れにとらわれず自由な形で構成しました。

### (3) チェックBOXで理解したかどうかを自己評価できること

原則として見開き1~2ページで説明を終える形式とし、**check BOX**  の質問で理解度を確認できるようになっています。

本書は、DSPが初めてという人、専門書を読んでではみたが難しくてどうもとっつきにくい、わかりにくいと困っている人をとくに意識して、わかりやすく解説してあります。なお、すでに勉強したことがある人でも、副読本や復習のための参考として役立ててもらえるものと思います。

また、わかりやすく系統立てて段階的に習得できるようになっていますから、しっかりと読み進んでいってもらう過程において、短期間にデジタル信号処理の基礎から応用までの必須知識をスムーズに身につけてもらえるものと確信しています。

最後まで読破したあとには、webサイトに「応用問題」があります。どのぐらいの実力がついたのか、確認ができます。 [サイトへ \(要登録\)](#)

終わりに、【試して納得！】シリーズを読破されたみなさんには、実践的な経験を通して、デジタル信号処理に精通した技術者として活躍されんことを期待しつつ、筆を置くことにします。





## 目次

【試して納得！】シリーズ刊行にあたって . . . . .	2	第三章 “DSPアナライザで感じる” デジタル信号処理応用 . . . . .	76
目次 . . . . .	3	三の1 デジタル直交振幅変調 (QAM) を疑似体験してみよう . . . . .	78
自分で「試して納得！」できるIS Bookについて . . . . .	4	三の2 適応フィルタの学習アルゴリズム . . . . .	81
序章 デジタル・フィルタが学習して賢くなるって、ホント?! . . . . .	5	三の3 雑音に埋もれる周期信号を取り出してみよう . . . . .	84
		(適応・線スペクトル強調器)	
第一章 FIRフィルタの設計にチャレンジ! . . . . .	7	付録A フリーソフトScilabはDSP解析&設計の救世主なり! . . . . .	86
一の1 FIRフィルタの伝達関数とシステム構成 . . . . .	10	付録B Scilabインストール&起動マニュアル . . . . .	87
一の2 FIRフィルタの連続形構成 . . . . .	12	付録C Scilabの基本コマンドを知ろう . . . . .	88
一の3 いろいろな周波数特性とインパルス応答 . . . . .	14	付録D Scilabによるデジタル信号波形のグラフ表示 . . . . .	94
一の4 DSPのアナライザでシミュレーション実験してみよう . . . . .	17	付録E Scilabで見るz変換、逆z変換 . . . . .	96
一の5 フーリエ級数とFIRフィルタの伝達関数 . . . . .	19	付録F 式(1-2)の導出プロセス . . . . .	102
一の6 フーリエ級数によるFIRフィルタの設計を体験しよう . . . . .	21	付録G 式(1-26)の導出プロセス . . . . .	103
一の7 ギブス現象と遮断周波数 . . . . .	24	付録H 式(1-34)の導出プロセス . . . . .	104
一の8 窓関数によるFIRフィルタの設計を体験しよう . . . . .	28	付録I 式(1-37)の導出プロセス . . . . .	105
一の9 ハイパス形FIRフィルタの設計 . . . . .	32	付録J 式(1-40)の導出プロセス . . . . .	106
一の10 バンドパス形FIRフィルタの設計 . . . . .	34	付録K 式(2-35)の導出プロセス . . . . .	107
一の11 バンド・エリミネート形FIRフィルタの設計 . . . . .	36	付録L 双1次z変換によるIIRデジタル・フィルタの設計コマンド . . . . .	108
第二章 IIRフィルタの設計にチャレンジ! . . . . .	38	付録M ヒルベルト変換と解析信号 . . . . .	111
二の1 基本IIRフィルタの伝達関数とシステム構成 . . . . .	41	付録N デジタル直交変調/復調の概要 . . . . .	112
二の2 IIRフィルタの連続形構成 . . . . .	44	付録O 主要な解析&設計ツール(一覧表) . . . . .	115
二の3 IIRフィルタの並列形構成 . . . . .	46		
二の4 IIRフィルタの極、零点と安定性 . . . . .	48	操作方法 . . . . .	118
二の5 700°・704°のデジタル化によるIIRフィルタ設計の考え方 . . . . .	50	実験室 . . . . .	128
二の6 双1次z変換の安定性と周波数特性 . . . . .	53	著者略歴/参考文献 . . . . .	130
二の7 双1次z変換によるIIRフィルタの設計を体験しよう . . . . .	55		
二の8 双1次z変換と周波数ひずみの影響 . . . . .	58		
二の9 双1次z変換による設計手順 . . . . .	61		
二の10 多彩なゲイン特性 (バ・ウ・ス・チビ・シフ、逆チビ・シフ、連立チビ・シフ) . . . . .	64		
二の11 各種ローパス形IIRフィルタの設計 . . . . .	67		
二の12 各種ハイパス形IIRフィルタの設計 . . . . .	69		
二の13 各種バンドパス形IIRフィルタの設計 . . . . .	72		
二の14 各種バンド・エリミネート形IIRフィルタの設計 . . . . .	74		





第一章

FIRフィルタの設計にチャレンジ！【1/3】

デジタル信号処理では、本来、アナログ信号である画像や音などをデジタル信号としての数値データに変換して扱う。こうした数値データに対して、何らかの計算を行って出力するのがデジタル・フィルタの役割の一つである。その結果として入力信号の周波数特性が変化を受けることになるため、例えば音色を変えたり、画像に含まれるノイズ（雑音）を取り除いたりすることができる。

一般にデジタル・フィルタの基本要素は、「乗算器」、「加算器」、「メモリ（遅延器）」の3種類である。これらの基本要素の接続の違いによって、デジタル・フィルタは

- 「FIR (Finite Impulse Response) フィルタ」
- 「IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ」

の2種類に大別される。

それでは、FIRフィルタの設計にチャレンジする前に、FIRフィルタの概要を体感してもらおう。まず、図1-aのシステム構成を見てもらいたい。図1-aでは、アナログ信号源にサンプリング周波数1[kHz]のサンプリング&ホールド器(S/H)を直列接続して、デジタル信号入力とする。つまり、アナログ信号源を  $1[\text{ミリ秒}] = \frac{1}{1[\text{kHz}]} [\text{秒}] = \frac{1}{1000[\text{Hz}]} [\text{秒}] = 0.001[\text{秒}]$  の時間間隔でサンプリングしている。

最初に、カーソルをデジタル・フィルタの長方形ブロック  $H(z)$  の真上に移動して左ダブル・クリックすると、デジタル・フィルタの係数を設定するウィンドウ画面が現れる（操作方法）。図1-bでは、すべての  $\{a_n\}_{n=0}^{n=2}$  が0で、3個の係数が  $b_0=0.2$ 、 $b_1=0.5$ 、 $b_2=0.3$ であり、図1-cに示す2次のFIRフィルタの回路構成に同じである。乗算器、加算器、遅延器を組み合わせて図1-cの回路を作成する手間はかなりのものなので、係数設定するだけで済ませられるように配慮している（手前みそだが、なかなか便利な機能で重宝する）。

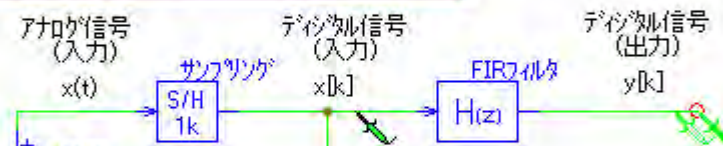


図1-a デジタル・フィルタのブロック表示例

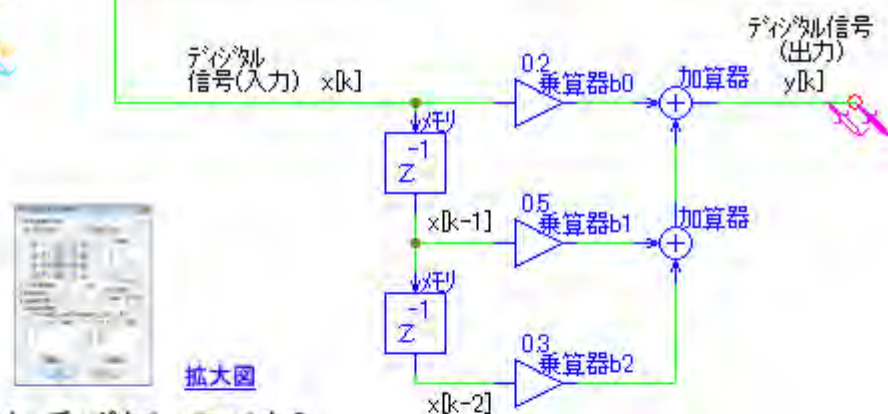


図1-b デジタル・フィルタの係数設定画面



拡大図

図1-c 2次のFIRフィルタ構成例







一の1

FIRフィルタの伝達関数とシステム構成【1/2】

FIRフィルタの定義としての差分方程式は、次のとおりである。

$$y[k] = \sum_{n=0}^N b_n x[k-n] \quad (1-1)$$

ここで、 $x[k]$ は入力信号、 $y[k]$ は出力信号で、順にアナログ信号  $x(t)$ 、 $y(t)$ を  $T$ [秒]間隔でサンプリングしたデジタル信号  $x[k] = x(kT)$ 、 $y[k] = y(kT)$ 、 $\{b_n\}_{n=0}^N$ は乗算器に設定されるフィルタ係数、 $N$ [次]はフィルタのサイズを表す次数(メモリの総個数は  $N$ [個]、乗算器の総個数は、 $N+1$ [個])である。なお、フィルタ係数  $\{b_n\}_{n=0}^N$ はインパルス応答に等しい。

また、入力信号の  $z$ 変換  $X[z]$ とフィルタ係数の  $z$ 変換  $B[z]$ をかけ合わせたものが出力信号の  $z$ 変換  $Y[z]$ になるという関係として

$$Y(z) = B(z)X(z) \quad (1-2)$$

が成立する(導出プロセスは、付録Fを参照)。

このとき、式(1-2)より、入力信号全体( $z$ 変換)に対する出力信号全体( $z$ 変換)の比として、伝達関数  $B(z)$ が次式で与えられる。

$$B[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\text{出力信号全体}}{\text{入力信号全体}} = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} \quad (1-3)$$

いま、伝達関数  $B(z)$ が、

$$B(z) = 0.1 + 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2} + 0.2z^{-3} \quad (1-4)$$

で表されるFIRフィルタをシステム構成してみよう。

図1-1に、FIRフィルタの具体的なシステム構成例(サンプリング間隔  $T=0.01$ [秒]で、サンプリング周波数  $f_T=1/T=1/0.01=100$ [Hz])を示す。これは、4個の乗算器、3個の加算器(2入力1出力)、3個のメモリ(遅延器)をもつ3[次]のFIRフィルタである。

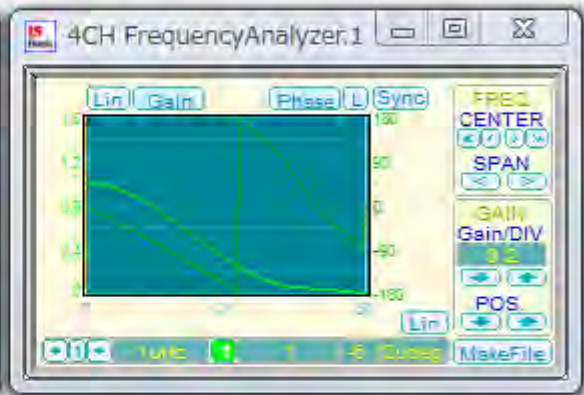
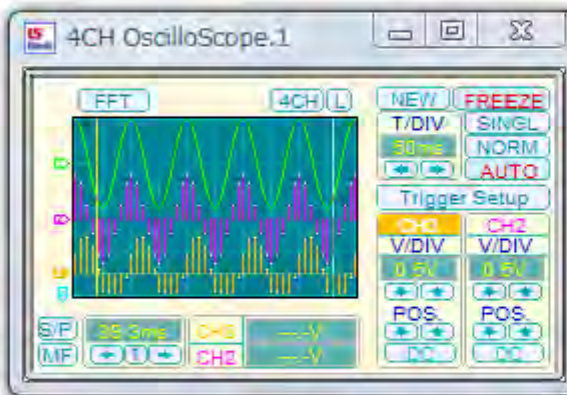
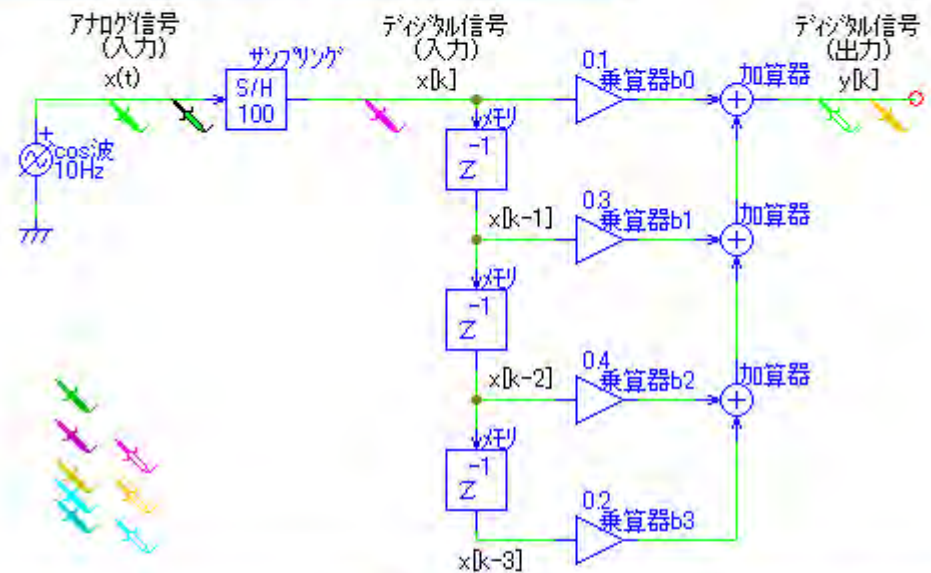


図 1-1 3次のFIRフィルタの入出力波形および周波数特性





一の2

FIRフィルタの縦続形構成【1/2】

本論に入る前に、科学技術計算用無償ソフトウェア **Scilab** を利用して、**その1** で示した直接形構成のFIRフィルタの伝達関数

$$B(z) = 0.1 + 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}$$

を因数分解してみよう (**実行例1-1**)。なお、実行例で使用する Scilab については、**付録A** ~ **付録D** を参考にインストールした後、Scilabインストール&起動マニュアルの p.6-7 に記載されている<<起動手順>>に従って操作し、基本コマンド、波形グラフ表示を理解しておこう。

**実行例1-1** (伝達関数を入力して因数分解する)

```

->hz=0.1+0.3*p+0.4*p^2+0.2*p^3;
->fact(hz)
ans =
| 1 + 2p + 2p^2 | 1 + p | 0.1 |
    
```

[ **実行例1-1** の説明 ]

- ①  $z^{-1}$  をプログラム変数pで置き換えて、式 (1-4) の伝達関数を入力する
- ② 関数コマンドfactは、  
fact (伝達関数)  
と記述することにより、伝達関数の因数分解が求められる。この実行例では、得られた結果から、 $H(z) = 0.1 + 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}$  が次のように因数分解される。

$$B(z) = 0.1 \times (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}) \times (1 + z^{-1}) \tag{1-8}$$

こうして積形式で得られた因数に基づき、図1-2に示す縦続形構成とよばれるFIRフィルタの二つのブロック [ $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ ] として、

$$B(z) = 0.1 \times H_1(z) \times H_2(z); H_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}, H_2(z) = 1 + z^{-1} \tag{1-9}$$

の乗算係数を設定してください (p.7 参照)。このとき、周波数アナライザには縦続形構成の周波数特性 (緑色) しか表示されないが、周波数アナライザ下部のグラフ表示優先機能のチャンネル数字 **1** をクリックしてピンク色 **2** に変えてほしい。すると、緑色の裏に隠れていた周波数特性が表示されるので、直接形構成 [伝達関数  $B(z) = 0.1 + 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}$ ] に一致することが確認できる。

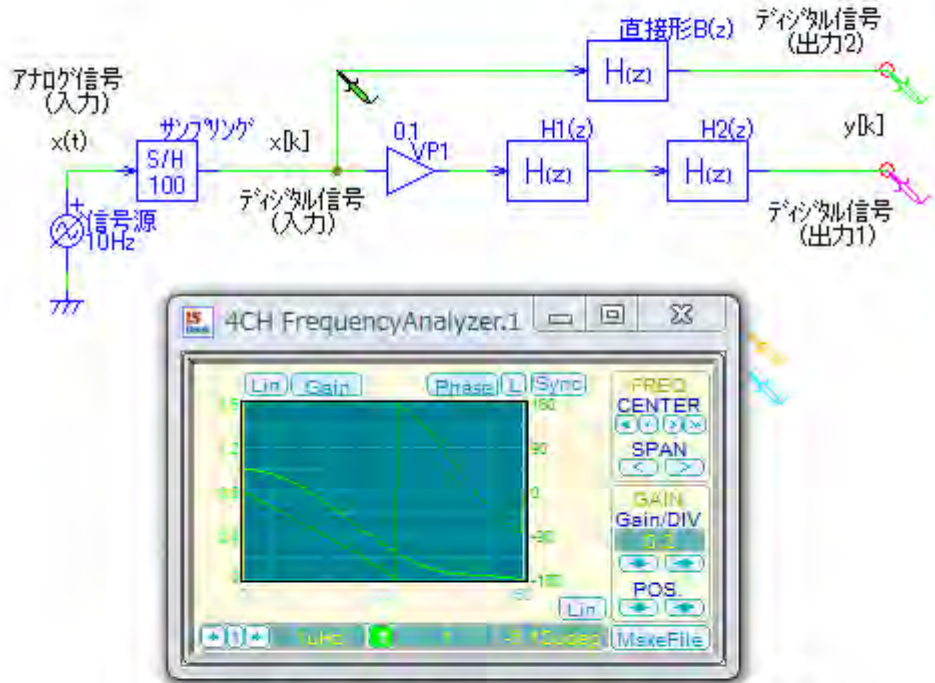


図1-2 縦続形FIRフィルタのシステム構成と周波数特性

ところで、二つのブロックの順序を入れ替えてみるとどうなるだろうか？ まったく変化なしで、縦続形構成の順序を入れ替えても、特性は同じになるので確認してほしい (**部品移動の操作方法**)。





## 一の4 DSPのアナライザでシミュレーション実験してみよう【2/2】

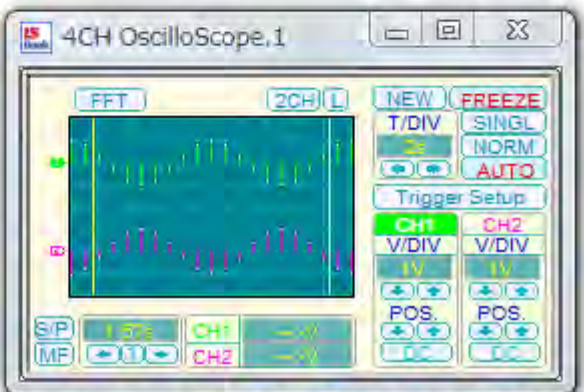


図 1-13 ローパス・フィルタの入出力波形の表示例（正規化周波数  $\Omega=0.1$ ）

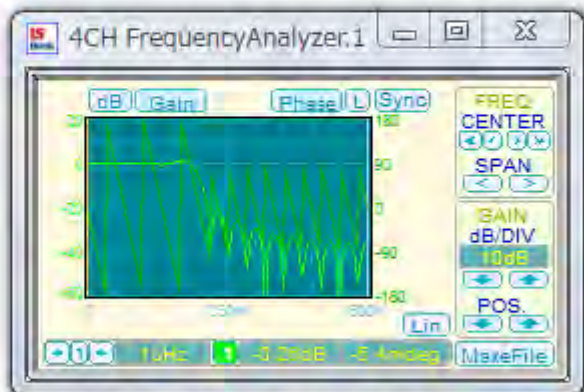


図 1-14 周波数特性（濃い緑色：ゲイン，薄い緑色：位相）の表示例

図 1-13はオシロスコープ画面表示の一例で正規化周波数  $\Omega=f/f_T=0.1$  のcos波入力に対する応答出力波形，図 1-14は周波数アナライザ画面表示で周波数特性（ゲイン[デシベル表示]，位相）を示している。ただし，正規化周波数に対するシミュレーションなのでサンプリング周波数  $f_T=1$  [Hz]であることに注意してほしい。つまり，実際の周波数に換算する場合は，式(1-11)に基づき，正規化周波数  $\Omega$  とサンプリング周波数  $f_T$  [Hz] の積を探ればよい。

また，実際の周波数でシミュレーションする場合には，サンプリング&ホールド器  $\rightarrow$  S/H 1 の真上にカーソルを移動して左ダブル・クリックして図 1-15に示す設定画面を表示し，サンプリング周波数  $f_T$  の数値を変更する必要がある。同時に，オシロスコープの時間（横軸）の1目盛を  $0.1/f_T \sim 0.2/f_T$  [秒]程度，周波数アナライザの周波数（横軸）はサンプリング周波数  $f_T$  に合わせて表示範囲（ $0 \sim f_T/2$  [Hz]）を設定するとよい。



拡大図

図 1-15 サンプリング&ホールド器のパラメータ設定ダイアログ



（正解と思う数字を半角で入力し，“ENTER”キーを押す）

いま，正規化周波数  $\Omega$  が 0.2 のとき，実際の周波数  $f$  [Hz] はいくらからか。ただし，サンプリング周波数は 44.1 [kHz] とする。 （答）



一の5

フーリエ級数とFIRフィルタの伝達関数【2/2】

したがって、式(1-19)と式(1-22)を見比べることにより、 $N$ [次]のFIRフィルタの係数値  $\{b_n\}_{n=0}^{n=N}$  は、フーリエ係数  $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  を  $-N/2 \leq n \leq N/2$  の範囲で打ち切ったもの  $\{c_n\}_{n=-N/2}^{n=N/2}$  に等しく、 $n = 0, 1, 2, \dots, N$  に対して、

$$b_n = c_{n-N/2} \quad ; \quad b_n = b_{N-n} \quad (1-24)$$

となる(図1-18)。このことは、図1-18に示すように、0を中心としてフーリエ係数  $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  を打ち切り、フィルタ係数  $b_n = c_n$  とすると、インデックス  $n$  (添え字) は負から始まることになるので、改めてフィルタ係数のインデックスを0から始まるように書き換えることに等価である。

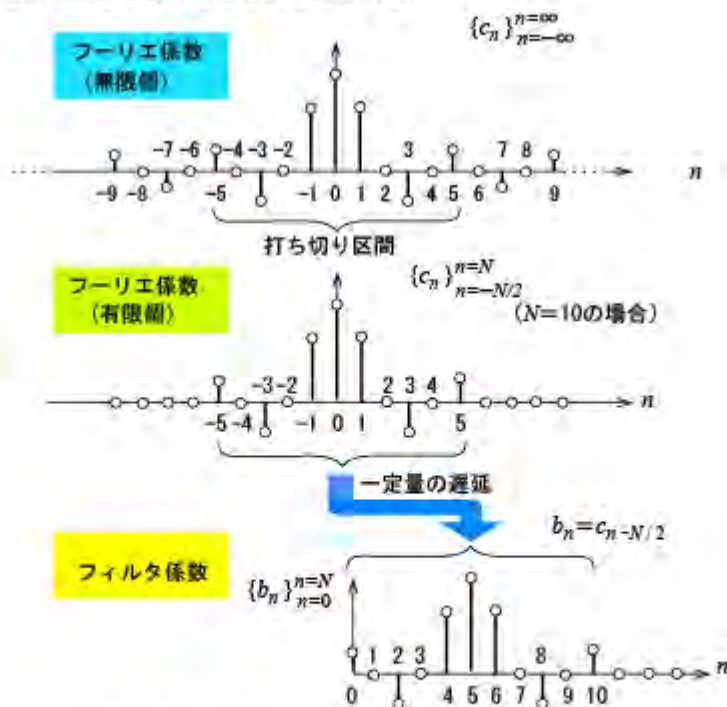


図1-18 フーリエ係数にFIRフィルタの設計手順

これまでの考察により、フーリエ級数展開を利用すると、所望の周波数特性  $B(e^{j2\pi\Omega})$  を満たすFIRフィルタが設計できるのである。つまり、式(1-23)のフーリエ係数  $\{c_n\}_{n=0}^{n=N}$  を打ち切って得られる  $\{c_n\}_{n=-N/2}^{n=N/2}$  を、 $N/2$  サンプルだけ遅らせる(右に平行移動する)ことによって、FIRフィルタの係数値(インパルス応答に相当)として  $\{b_n\}_{n=0}^{n=N}$  が得られ、設計が実行されるのである。なお、 $N/2$  サンプルだけ遅らせるという処理は、数式表現で言えば、式(1-17)の  $z^{-N/2}$  に該当する。



(正解と思う数字を半角で入力し、“ENTER”キーを押す)

いま、零位相FIRフィルタの係数値がフーリエ係数  $\{c_n = |n|\}_{n=-50}^{n=50}$  で与えられるとき、100[次]のFIRフィルタの伝達関数  $B(z)$  について、 $z^{-61}$  の項にあたる係数値はいくらか？ (答)





一の8

窓関数によるFIRフィルタの設計を体験しよう【2/4】

wfunc (窓関数の形状, 次数, パラメータ)

と記述することにより, 各種の窓関数が生成される. ただし, 窓関数の形状は,

- 三角窓: tr, ハニング窓: hn, ハミング窓: hm,
- ブラックマン窓: bk, カイザー窓: kr

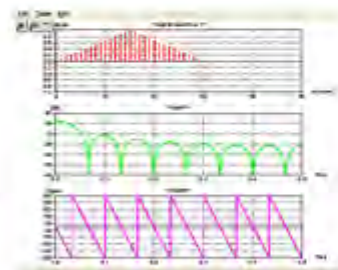
のアルファベット2文字で指定する. 窓関数のサンプル値の総個数は, 次数  $N$  に1を加えたものに等しい. なお, カイザー窓については, 表1-1のパラメータ  $\beta$  ( $4 < \beta < 9$ ) を設定するが, 他の窓関数についてはパラメータを入力する必要はない.

⑧~⑫ 表1-1の各窓関数 (③~⑦) の形状, 周波数特性 (ゲイン, 位相) をグラフ表示する.

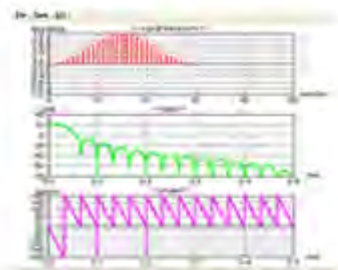
表1-1 代表的な窓関数 ( $N$ は偶数)

名称	特性	サンプル値 $\{w_n\}_{n=0}^{n=N}$
三角窓あるいは バートレット窓 (Bartlett)		$w_n = \begin{cases} 2n/N & : 0 \leq n \leq N/2 \\ 2-2n/N & : N/2 \leq n \leq N \end{cases}$
ハニング窓 (Hanning)		$w_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N} \right) \right]$ : $0 \leq n \leq N$
ハミング窓 (Hamming)		$w_n = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/N)$ : $0 \leq n \leq N$
ブラックマン窓 (Blackman)		$w_n = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/N) + 0.08 \cos(4\pi n/N)$ : $0 \leq n \leq N$
カイザー窓 (Kaiser)		$w_n = \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - (1 - 2n/N)^2} \right]}{I_0[\beta]}$ : $0 \leq n \leq N, 4 < \beta < 9$ $I_0[\beta] = 1 + \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{(\beta/2)^\ell}{\ell!} \right)^2$ : $L$ は15程度に選ぶ

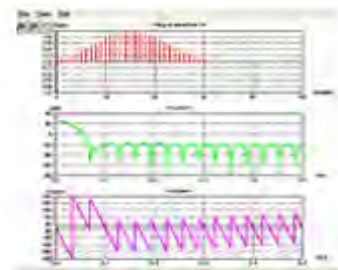
$I_0[ ]$  は0次の第一種変形ベッセル関数



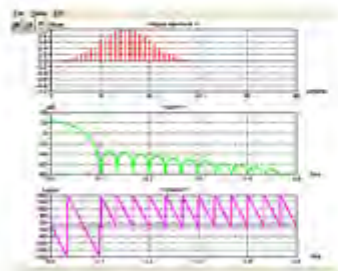
(a) 三角窓 (拡大図)



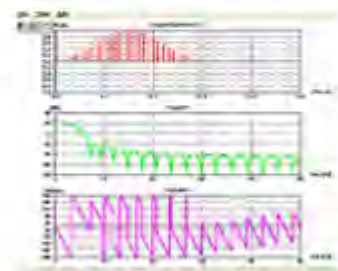
(b) ハニング窓 (拡大図)



(c) ハミング窓 (拡大図)



(d) ブラックマン窓 (拡大図)



(e) カイザー窓 ( $\alpha=6$ ) (拡大図)

図 1-28 代表的な窓関数 (上段: 時間波形, 中段: ゲイン, 下段: 位相)





第二章

II Rフィルタの設計にチャレンジ！【2/3】

② 図2-aの設計仕様を満たす連立チェビシェフ特性を有するバンドパスII Rフィルタを設計する。このとき、変数 $p (=z^{-1})$ として、標準形構成、連続形構成の伝達関数  $H_{標}(z)$  [変数名 hz],  $H_{継}(z)$  [変数名 hzc] が算出される。なお、連立チェビシェフ特性を有するローパス形II Rフィルタの設計コマンド `d_bpf_ell` を `d_bpf_butt`, `d_bpf_ch1`, `d_bpf_ch2` に変えれば、順にバターワース、チェビシェフ、逆チェビシェフの各特性を有するバンドパス形II Rフィルタの伝達関数として、標準形構成は  $H(z)$  (変数 hz)、連続形構成は  $H_c(z)$  (変数 hzc) が得られる (詳細は、付録L を参照)

$$H(z) = \frac{0.1753330 - 0.0168684z^{-1} - 0.3205308z^{-2} + 0.0025177z^{-3} + 0.4535149z^{-4} + 0.0025177z^{-5} - 0.3205308z^{-6} - 0.0168684z^{-7} + 0.1753330z^{-8}}{1 - 0.1968074z^{-1} + 0.4471224z^{-2} - 0.1608911z^{-3} + 1.1713364z^{-4} - 0.1535557z^{-5} + 0.3850102z^{-6} - 0.0627722z^{-7} + 0.256919z^{-8}} \quad (2-a)$$

$$H_c(z) = 0.1753330 \times \frac{1 - 1.8620172z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8629027z^{-1} + 0.5562302z^{-2}} \times \frac{1 + 1.8362662z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.7544358z^{-1} + 0.5399775z^{-2}} \times \frac{1 - 1.5882967z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.4103892z^{-1} + 0.9306431z^{-2}} \times \frac{1 + 1.5178402z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1.3220488z^{-1} + 0.9262977z^{-2}} \quad (2-b)$$

- ③ 連続形構成の周波数特性 (ゲイン、位相) をグラフ表示する
- ④~⑧ 積形式で表される連続形構成の伝達関数  $H_c(z)$  (変数 hzc) の各項を、dataフォルダに適切なファイル名で保存する
- ⑨ 標準形構成の伝達関数  $H(z)$  (変数 hz) を、dataフォルダに適切なファイル名で保存する
- ⑩ 標準形構成の伝達関数  $H(z)$  (変数 hz) から、和形式で表される並列形構成の伝達関数  $H_p(z)$  (変数 hzp) を算出する

$$H_p(z) = 0.6771732 + \frac{-0.2178429 - 0.2697119z^{-1}}{1 - 0.8629027z^{-1} + 0.5562302z^{-2}} + \frac{-0.2148391 + 0.3188084z^{-1}}{1 + 0.7544358z^{-1} + 0.5399775z^{-2}} + \frac{-0.0334092 + 0.0667177z^{-1}}{1 - 1.4103892z^{-1} + 0.9306431z^{-2}} + \frac{-0.0357484 - 0.0724213z^{-1}}{1 + 1.3220488z^{-1} + 0.9262977z^{-2}} \quad (2-c)$$

⑪~⑮ 式 (2-c) の積形式で表される並列形構成の伝達関数  $H_p(z)$  (変数 hzp) の各項を、dataフォルダに適切なファイル名で保存する

それでは、図2-bの上段の伝達関数  $H(z)$  [式(2-a)], 中段の連続形構成  $H_c(z)$  [式(2-b)], 下段の並列形構成の伝達関数  $H_p(z)$  [式(2-c)] に注意しつつ、それぞれ④~⑧, ⑨, ⑪~⑮で保存したファイルをドラッグ&ドロップして各ブロックのフィルタ係数を設定した後、設計したチェビシェフ特性を有するバンドパスII Rフィルタの周波数特性 (ゲイン、位相)、および入出力波形を確認してもらいたい。

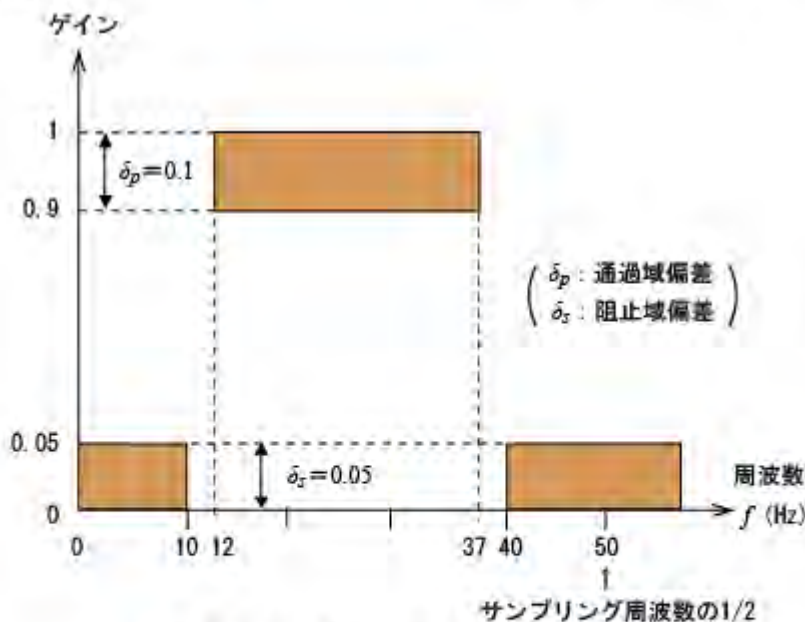


図 2-a バンドパス・フィルタの設計仕様





この1

基本 IIRフィルタの伝達関数とシステム構成【2/3】

図2-1に、IIRフィルタの具体的なシステム構成例（サンプリング間隔  $T=0.01$  [秒] で、サンプリング周波数  $f_T=1/T=1/0.01=100$  [Hz]）を示す。これは、5個の乗算器、4個の加算器（2入力1出力）、2個のメモリ（遅延器）をもつ2 [次] のIIRフィルタである。

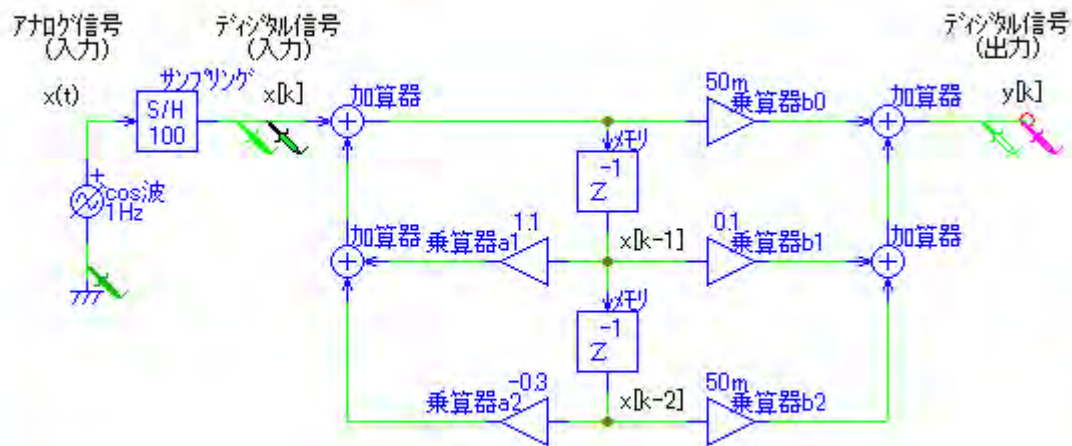
ところで、式(2-4)の伝達関数 を有する IIRフィルタの信号処理計算について、差分方程式で表すと、

$$y[k] = 1.1y[k-1] - 0.3y[k-2] + 0.05x[k] + 0.1x[k-1] + 0.05x[k-2] \quad (2-5)$$

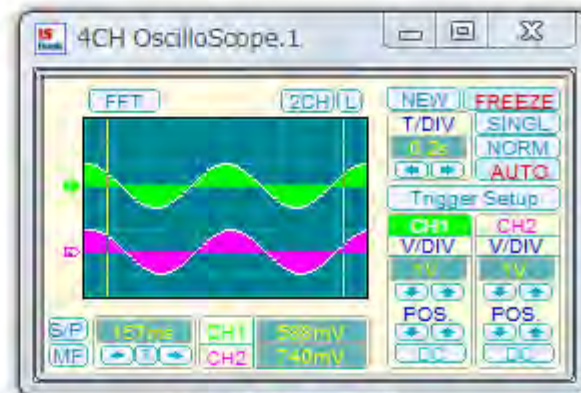
ただし、 $a_1=1.1$ 、 $a_2=-0.3$ 、 $b_2=0.05$ 、 $b_1=0.1$ 、 $b_0=0.05$

となり、フィードバックの乗算係数（1.1、-0.3）が伝達関数の分母係数（-1.1、0.3）の符号を反転した値に一致することも理解される。

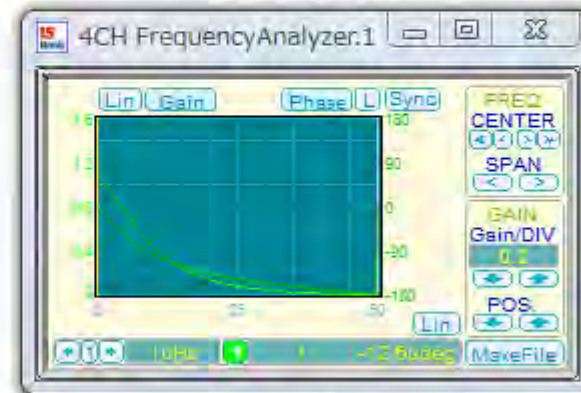
次に、図2-1において、オシロスコープと周波数アナライザの各測定用プローブを接続して、信号源（cos波）の周波数による入出力波形の変化や周波数特性（ゲイン、位相）のようすを調べてみてください。周波数を高くするにつれて、出力が小さくなるのでゲインはローパス特性であり、位相は曲線状の変化をすることがわかる。



(a) システム構成



(b) 入出力応答波形



(c) 周波数特性

図 2-1 2 次の IIRフィルタ（標準形構成）





二の二

II Rフィルタの縦続形構成【1/2】

Scilabを利用して、二の1で示した標準形構成のII Rフィルタの伝達関数

$$H(z) = \frac{0.05 + 0.1z^{-1} + 0.05z^{-2}}{1 - 1.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

を因数分解してみよう ( 実行例2-1 )

実行例2-1 (伝達関数を入力して因数分解する)

```

->hz=(0.05+0.1*p+0.05*p^2)/(1-1.1*p+0.3*p^2);
->hp=fact(hz)
hp
| 1 + p      1 + p      0.05 |
| -----      -----      |
| 1 - 0.6p   1 - 0.5p   1    |
->dsp2file(hp(1,1));
->dsp2file(hp(1,2));
    
```

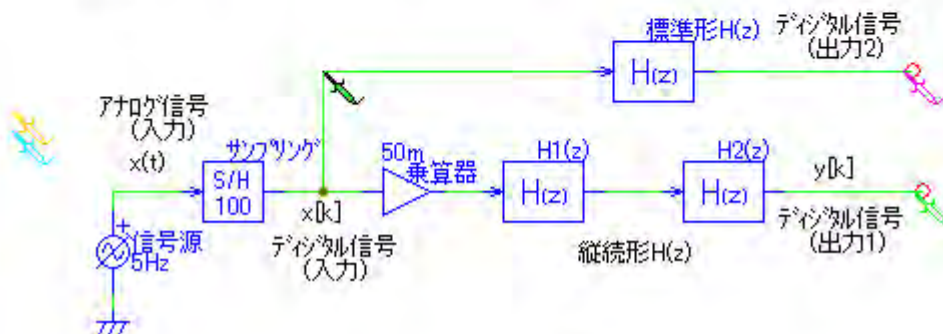
[ 実行例2-1 の説明 ]

- ①  $z^{-1}$ を変数pで置き換えて、式(2-4)の伝達関数を入力する
- ② 関数コマンドfactにより、伝達関数  $H(z)$  は、  

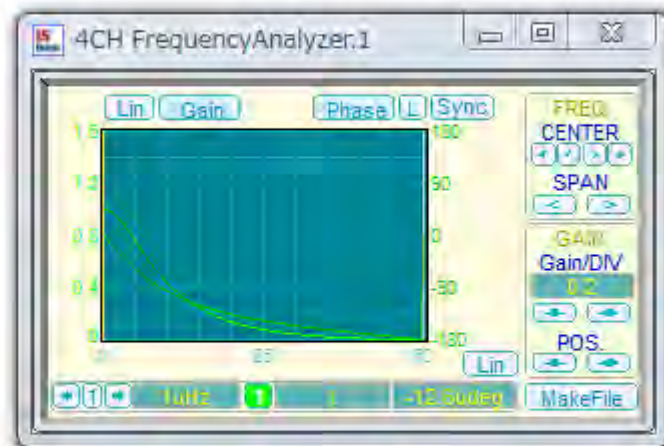
$$H(z) = 0.05 \times H_1(z) \times H_2(z); H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}; H_2(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \quad (2-9)$$
 と因数分解される
- ③, ④ 式(2-9)の二つの因数  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  を、dataフォルダに適当なファイル名(拡張子は「.txt」)を付けて保存する ( 実行例1-2 を参照)

このように積形式で得られた各因数に基づき、図2-4に示す縦続形構成とよばれるII Rフィルタの二つのブロックの乗算係数を設定してください (p.7を参照)。このとき、周波数アナライザには縦続形構成の周波数特性(緑色)しか表示されないが、周波数アナライザ下部のグラフ表示優先機能のチャンネル数字 1 をクリックしてピンク色 2 に変更してほしい。すると、緑色の裏に隠れてい

た周波数特性が表示されるので、標準形構成(図2-3)に一致することが確認できる。



(a) システム構成



(b) 周波数特性

図 2-4 縦続形II Rフィルタの周波数特性





二の三

II Rフィルタの並列形構成【1/2】

こんどは、二の1 で示した標準形構成のII Rフィルタの伝達関数、

$$H(z) = \frac{0.05 + 0.1z^{-1} + 0.05z^{-2}}{1 - 1.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

を部分分数展開(有理関数の総和形式)して

みよう ( 実行例2-2 )

実行例2-2 (伝達関数を入力して部分分数展開する)

```

->hz=(0.05+0.1*p+0.05*p^2)/(1-1.1*p+0.3*p^2);
->hp=expand(hz)
hp =
| 0.1666667    2.1333333    -2.25    |
|-----|
|      1      1 - 0.6p    1 - 0.5p    |
->dsp2file(hp(1,2));
->dsp2file(hp(1,3));
    
```

[ 実行例2-2 ] の説明

- ①  $z^{-1}$ を変数pで置き換えて、式(2-4)の伝達関数を入力する
- ② 関数コマンドexpandは、  
expand (関数)  
と記述することにより、伝達関数の部分分数展開が求められる。この実行例では得られた結果から、次のように部分分数展開される。

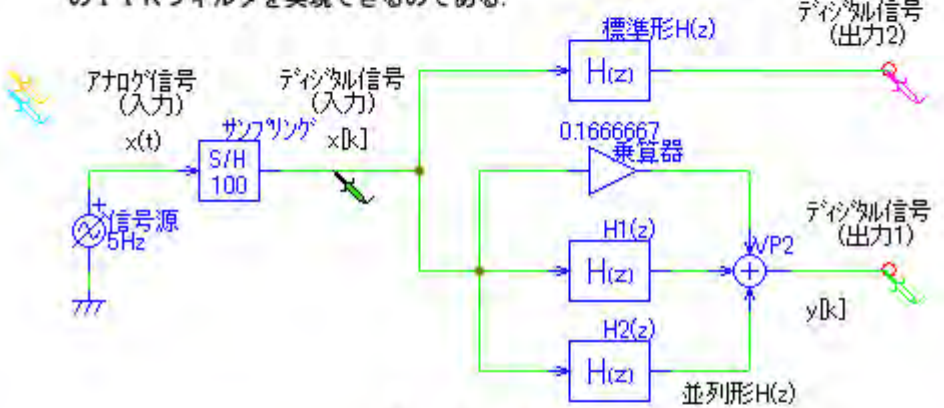
$$H(z) = 0.1666667 + H_1(z) + H_2(z) \tag{2-10}$$

$$\text{ただし、} H_1(z) = \frac{2.1333333}{1 - 0.6z^{-1}} ; H_2(z) = \frac{-2.25}{1 - 0.5z^{-1}}$$

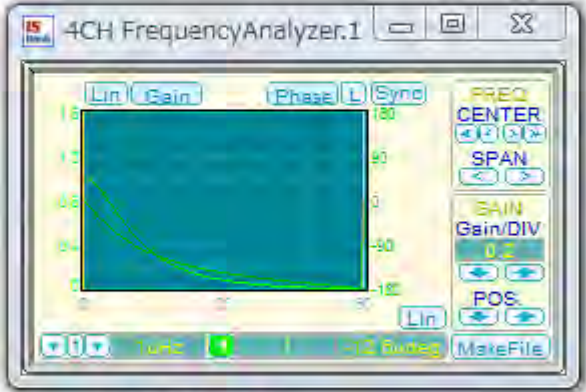
- ③, ④ 式(2-10)の二つの因数  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  を、dataフォルダに適切なファイル名(拡張子は「.txt」)を付けて保存する。

このように部分分数展開で得られた各因数に基づき、図2-6に示す並列形構成

とよばれるFIRフィルタの二つのブロックの乗算係数を設定して、標準形構成(図2-3)に一致することを確認してほしい。このように伝達関数の部分分数展開によって得られる因数を有する低次のII Rフィルタを並列に接続すれば、高次のII Rフィルタを実現できるのである。



(a) システム構成



(b) 周波数特性

図 2-6 並列形II Rフィルタの周波数特性





二の五

アナログ・フィルタのデジタル化によるIIRフィルタ設計の考え方【2/3】

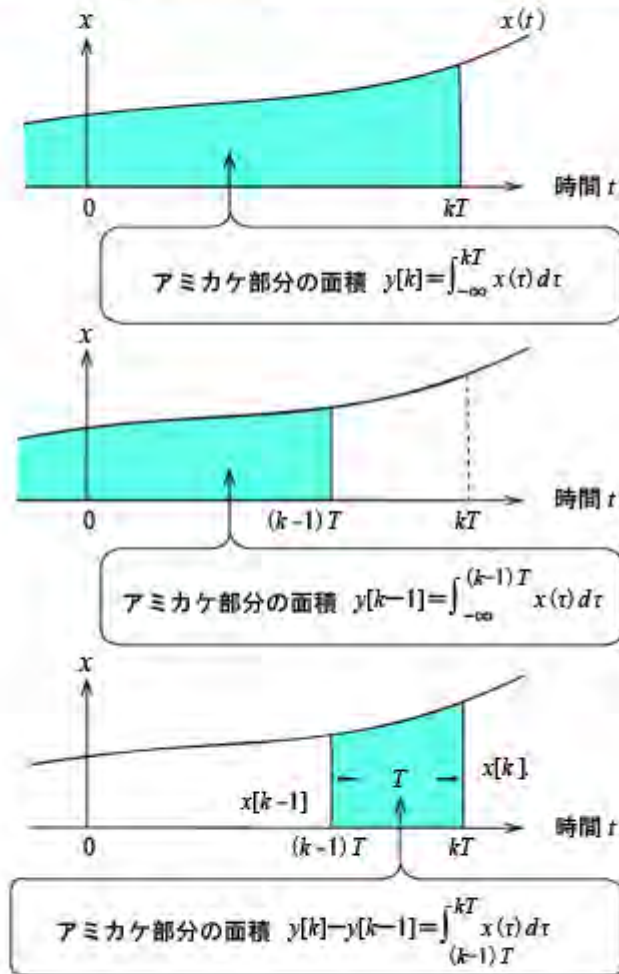


図 2-10 アナログ積分のデジタル・シミュレーション

このアミカケ部分の面積を台形とみなして近似計算すれば、上底と下底がそれぞれ、

$$x[k]=x(kT), \quad x[k-1]=x((k-1)T)$$

で与えられ、高さが  $T$  であることから、台形公式より、

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(\tau) d\tau = \frac{T(x[k]+x[k-1])}{2} \quad (2-24)$$

と求められる。得られた関係を式 (2-23) に代入すると、次式が導かれる。

$$y[k]-y[k-1] = \frac{T(x[k]+x[k-1])}{2} \quad (2-25)$$

よって、式 (2-25) の両辺を  $z$  変換すれば、

$$Y(z)-z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2} \{X(z)+z^{-1}X(z)\} \rightarrow (1-z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2} (1+z^{-1})X(z)$$

となり、デジタル積分の伝達関数  $H(z)$  は、

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) \quad (2-26)$$

のように表される。

以上の考察をふまえて、式 (2-19) と式 (2-26) より、

アナログ積分の伝達関数  $\frac{1}{s}$

||

デジタル積分の伝達関数  $\frac{T}{2} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)$

とすれば、アナログ積分の複素変数  $s$  とデジタル積分の変数  $z^{-1}$  の相互変換式として、



この9

双1次z変換による設計手順【2/3】

【手順1】プリワーピングによる周波数の修正（アナログ・フィルタの設計仕様への書き換え）

まず、デジタル設計仕様（周波数のみ）をアナログ設計仕様へ書き換える。すなわち、周波数ひずみを考慮して、デジタル角周波数  $\omega_{Di}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) を設計するとき使用するアナログ角周波数  $\omega_{Ai}$  を、

$$\omega_{Ai} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_{Di} T}{2}\right) \quad (2-40)$$

で求めておく。式(2-40)が、プリワーピング（前もって、周波数を伸縮させること）とよばれる処理の内容である。

【手順2】アナログ・フィルタの伝達関数設計

修正したアナログ設計仕様を満たすアナログ伝達関数  $G(s)$  を設計する。

【手順3】双1次z変換によるデジタル・フィルタの伝達関数設計

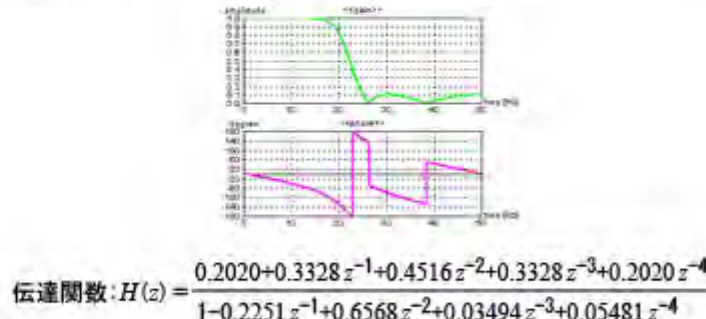
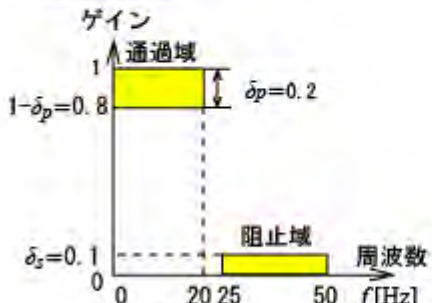
アナログ伝達関数  $G(s)$  の変数  $s$  に、

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2-41)$$

の関係代入し、デジタル伝達関数  $H(z)$  を算出する。

それでは、設計手順に従い、双1次z変換を用いて、図2-20の設計仕様を満たす逆チェビシェフ特性を有するデジタルLPFの伝達関数を求めてみよう

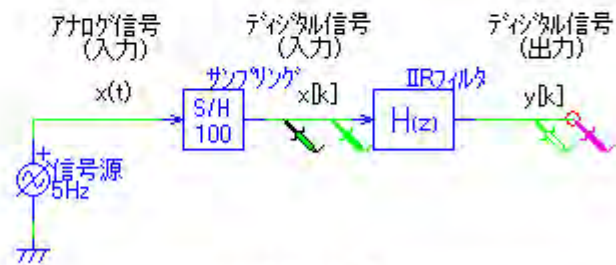
（**実行例2-7**、図2-21）。



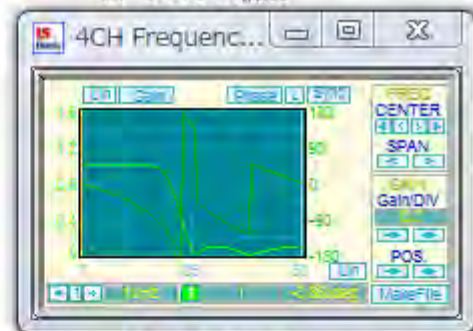
(a) 設計仕様(サンプリング周波数100[Hz])

(b) 設計結果 拡大図

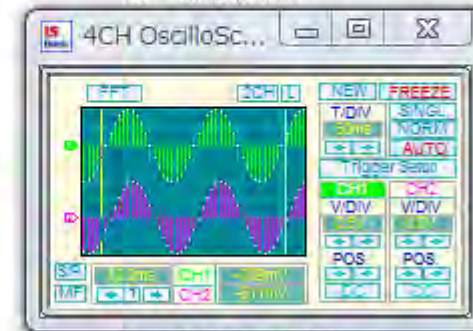
図 2-20 逆チェビシェフ形ローパス特性を有するIIRフィルタ



(a) システム構成



(b) 周波数特性



(c) 入出力応答波形

図 2-21 DSPアナライザによるシミュレーション実験



この10

多彩なゲイン特性 (バターズ, チェビシェフ, 逆チェビシェフ, 連立チェビシェフ) 【1/3】

IIRフィルタの多彩なゲイン特性として、主なものを以下に示す (図2-22)。

- (a) バタワース特性 (最大平坦特性ともいう)
- (b) チェビシェフ特性 (通過域が等リプル特性)
- (c) 逆チェビシェフ特性 (阻止域が等リプル特性)
- (d) 連立チェビシェフ特性 (楕円特性ともいい、通過域、阻止域とも等リプル特性)

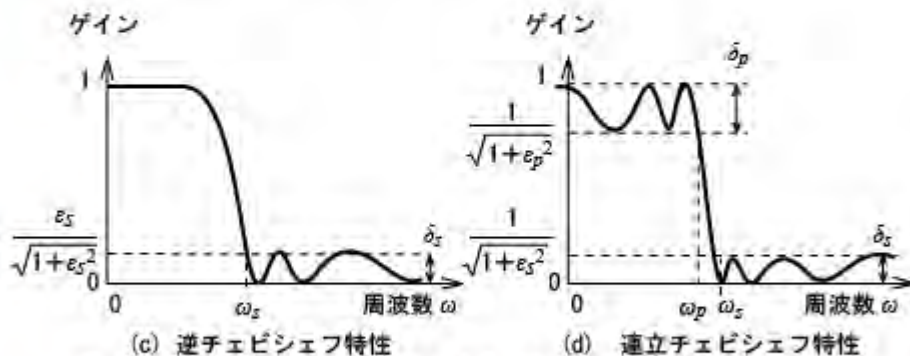
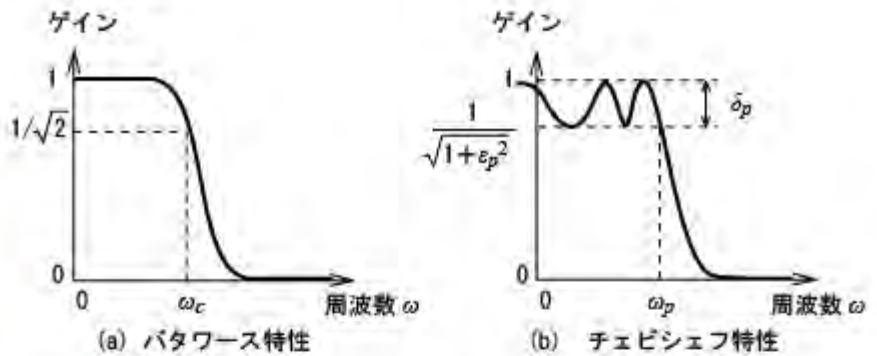


図 2-22 通過域、阻止域の形状によるフィルタの分類 (LPFの場合)

次に、ローパス特性を例に、四つの代表的なゲイン特性  $|G(j\omega)|$  の表現式 (アナログ・フィルタ) を示しておくが、詳細については専門書を参考にしたい (例えば、拙著「アナログ・フィルタ理論&設計入門」、CQ出版、2009年発刊)。

(a) バタワース特性

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad (2-42)$$

ただし、 $N$  はフィルタの次数、 $\omega_c$  [rad/秒] は遮断周波数で、ゲインが  $1/\sqrt{2}$  になる (3[dB]ダウンする) 周波数である。

(b) チェビシェフ特性

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_p^2 \left[ C_N\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \right]^2}} \quad (2-43)$$

ただし、 $N$  はフィルタの次数、 $\omega_p$  は通過域のエッジ周波数、 $C_N(x)$  は  $N$  次のチェビシェフ多項式 (表2-1) である。また、 $C_N\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$  は  $N$  次のチェビシェフ関数で、等リプル (波状) 特性はこの多項式の性質によるもので、 $\epsilon_p$  は通過域のリプルの大きさに関係するパラメータであり、小さいほど通過域における損失量を少なくすることができる。

表 2-1 チェビシェフ多項式

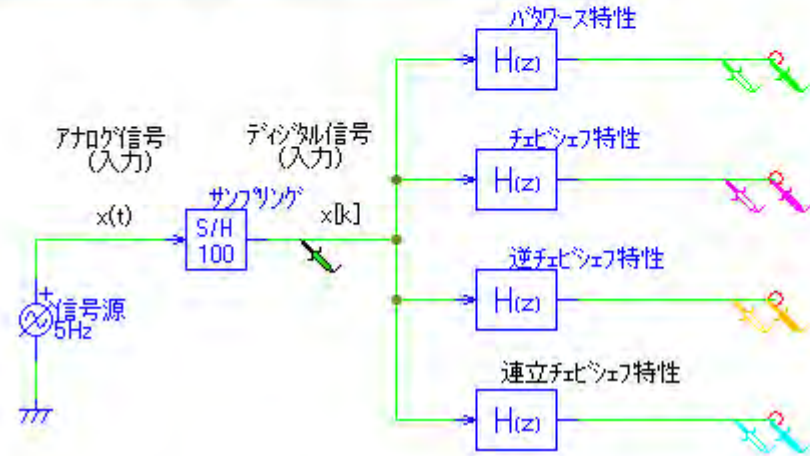
次数 $N$ [次]	チェビシェフ多項式 $C_N(x)$
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$



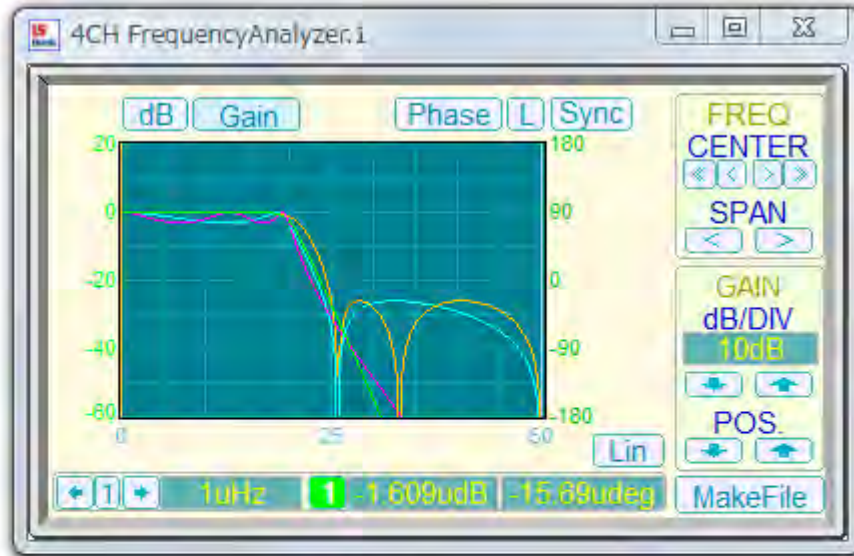
この10

多彩なゲイン特性（パワース特性、フェィシフ、逆フェィシフ、連立フェィシフ）【3/3】

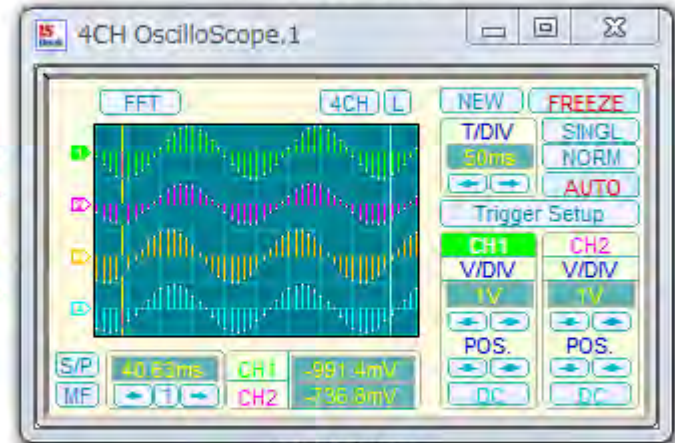
それでは、DSPアナライザを利用して、測定プローブをつないで四つのゲイン特性を体感してもらおう(図2-24)。最初は、パワース特性しかゲイン特性が表示されていないので、残りのゲイン特性を確認するためにプローブを移動して出力につないでください。同時に、入力信号（cos波）の周波数を増減したり、入力信号波形をパルス波やランプ波などに設定して、入出力応答の変化のようすを調べてみてください。



(a) システム構成



(b) ゲイン特性



(c) 出力波形

図 2-24 DSPアナライザによるシミュレーション実験（ローパス形 IIR フィルタ）



この11

各種ローパス形 IIRフィルタの設計【2/2】

【実行例2-8】の説明

- ① サンプリング間隔  $T=0.001$  [秒], サンプリング周波数  $f_T$  (変数 `sfrq`) = 1 [kHz] を設定する。
- ② 関数コマンド `d_lpf_ell` を利用する (付録 L)。ここで、通過域と阻止域のエッジ周波数  $[\Omega_p, \Omega_s]$ , 通過域と阻止域の偏差量  $\delta_p, \delta_s$  を引き数パラメータとし、積形式の伝達関数  $H(s)$  (変数 `hzo`)、それを展開した伝達関数  $H(z)$  (変数 `hz`)、零点 (変数 `zero`) と極 (変数 `pole`) 利得係数  $H_0$  (変数 `gain`) が得られる。

$$H_c(z) = 0.2538658 \times \frac{1 - 0.1951604z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.5123500z^{-1} + 0.7911300z^{-2}} \times \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.2834014z^{-1}} \quad (2-53)$$

なお、連立チェビシェフ特性を有するローパス形 IIRフィルタの設計コマンド `d_lpf_ell` を `d_lpf_butt`, `d_lpf_ch1`, `d_lpf_ch2` に変えれば、順にバタワース、チェビシェフ、逆チェビシェフの各特性を有するローパス形 IIRフィルタの設計データが得られる。

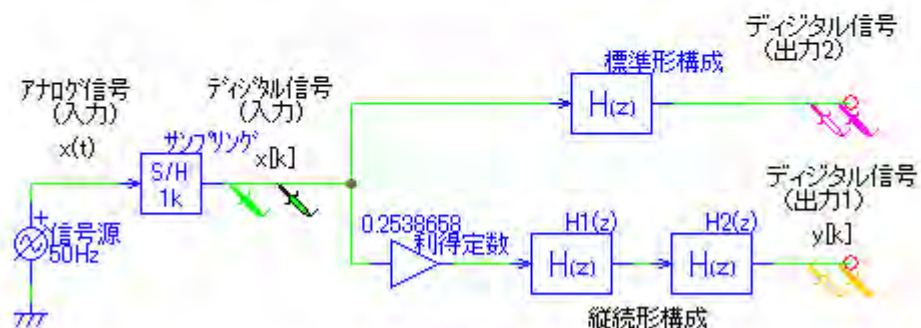
- ③ 標準形構成の伝達関数  $H(z)$ , すなわち,

$$H(z) = \frac{0.2538658 + 0.2043212z^{-1} + 0.2043212z^{-2} + 0.2538658z^{-3}}{1 - 0.7957515z^{-1} + 0.9363337z^{-2} - 0.2242082z^{-3}} \quad (2-54)$$

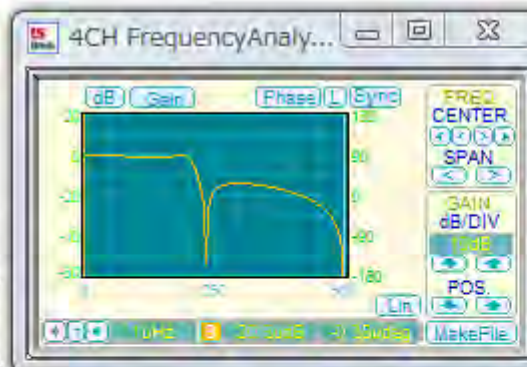
を DSP アナライザの係数設定ウィンドウで利用するために、`data` フォルダに適当なファイル名 (拡張子 `.txt`) を付けて保存する。

- ④, ⑤ 積形式の伝達関数  $H_c(z)$  [式 (2-53)] の利得定数を除く各項を、`data` フォルダに適当なファイル名で保存する。

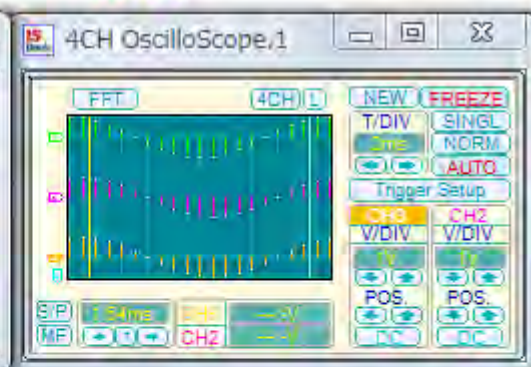
それでは、図2-26の上段の伝達関数  $H(z)$  [式 (2-54)]、下段の縦続形構成の伝達関数  $H_c(z)$  [式 (2-53)] に注意しつつ、利得定数と③~⑤で保存したファイルを利用して各ブロックのフィルタ係数を注意深く設定した後、設計した連立チェビシェフ特性を有するローパス形 IIRフィルタの周波数特性 (ゲイン, 位相), および入出力波形を確認してもらいたい。



(a) システム構成



(b) ゲイン特性



(c) 入出力波形

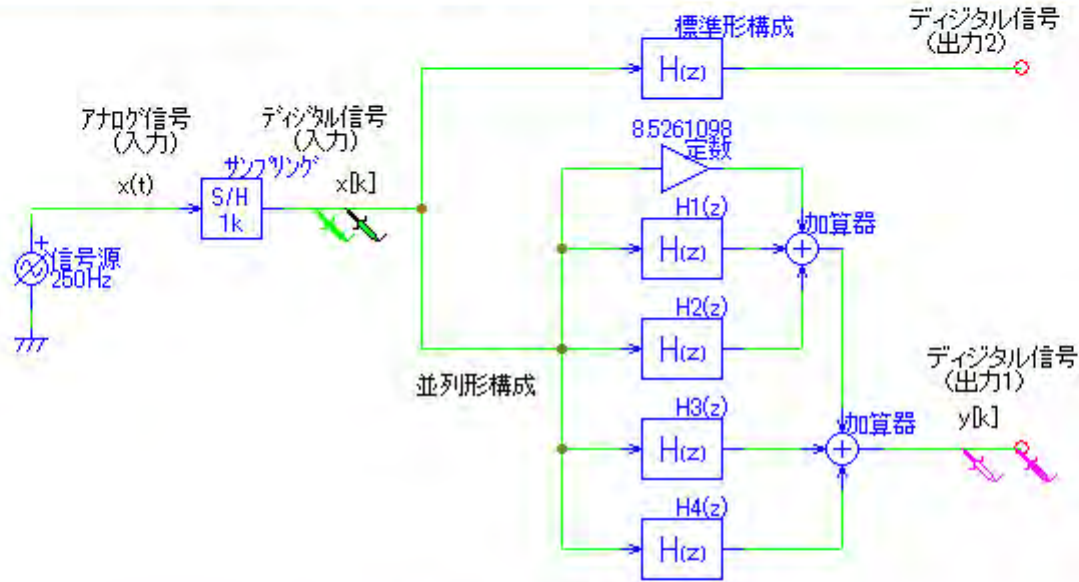
図 2-26 DSPアナライザによるシミュレーション実験 (連立チェビシェフ形 LPF)



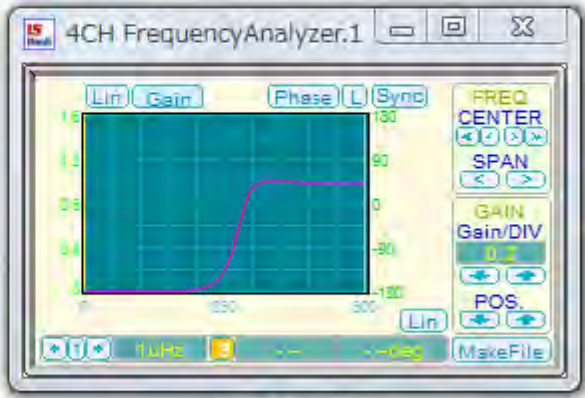


この12

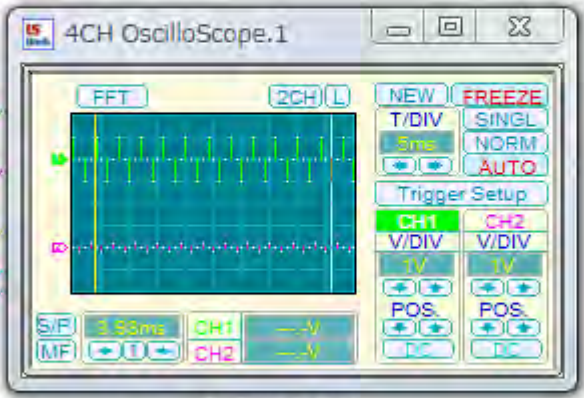
各種ハイパス形 IIRフィルタの設計 【3/3】



(a) システム構成



(b) ゲイン特性



(c) 入出力波形

図 2-28 DSPアナライザによるシミュレーション実験 (パタワース形HPF)

三の1

デジタル直交振幅変調 (QAM) を疑似体験してみよう【1/3】

まずは、地上デジタルTVやワンセグ放送、携帯電話などのデータ通信の代表的なデジタル変復調方式として、直交振幅変調(QAM, Quadrature Amplitude Modulation)を取り上げる。例えば、4値QAM方式では、2ビットのデジタル情報から生成されたI相(cos波、同相成分、Inphase)とQ相(sin波、直交成分、Quadrature)の二つの信号を、直交する二つの搬送波(cos波、sin波)で別々に振幅変調(ASK, Amplitude Shift Keying)し、合成(加算)することにより実現される。それでは、DSPアナライザで4値QAMのデータ送信部(変調)とデータ受信部(復調)を図3-1のように構成し、検証してみよう。ただし、図3-1では、搬送波の周波数  $f_c=10$ [MHz]、振幅レベル  $A=1$ [V]としている。(詳細な説明は、付録Nを参照)

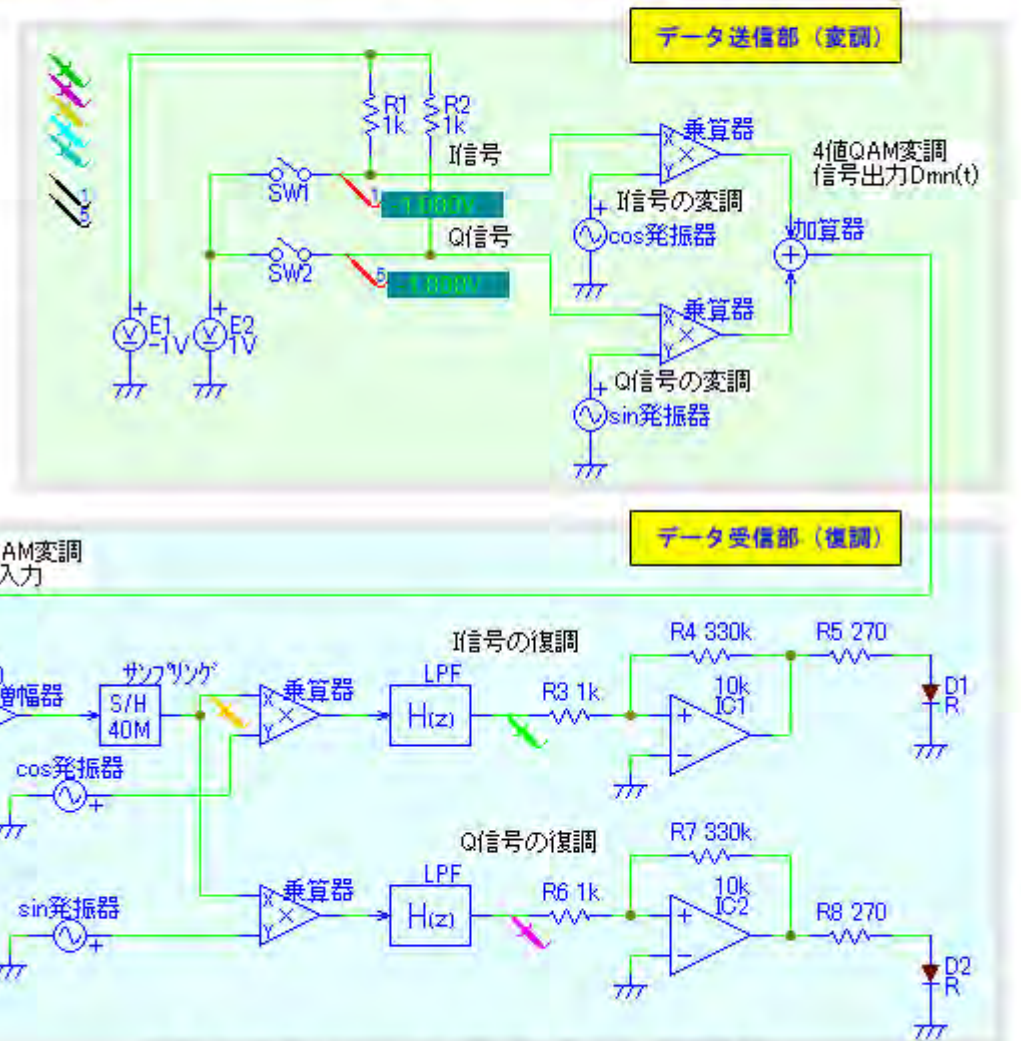
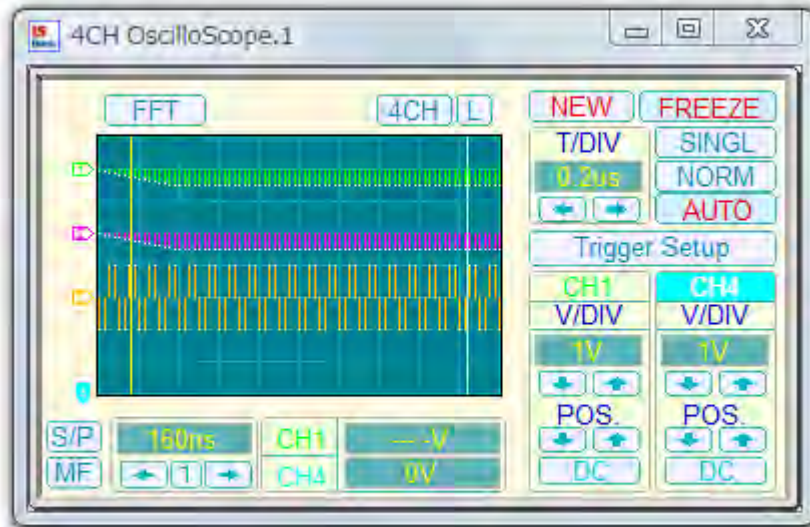


図 3-1 4値QAMデータ送受信システムの回路構成例







三の二

適応フィルタの学習アルゴリズム 【3/3】

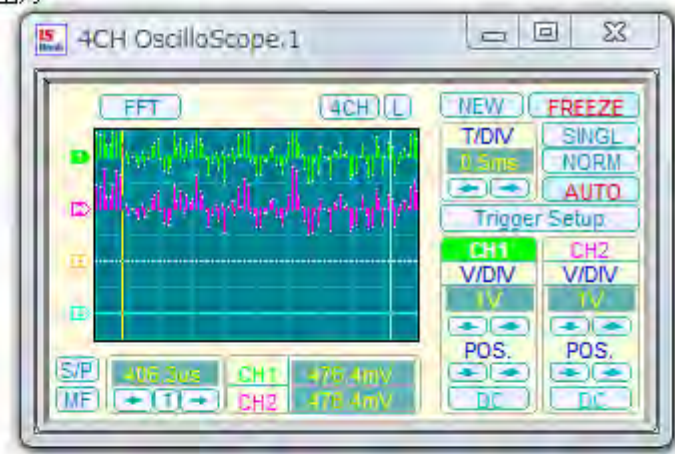
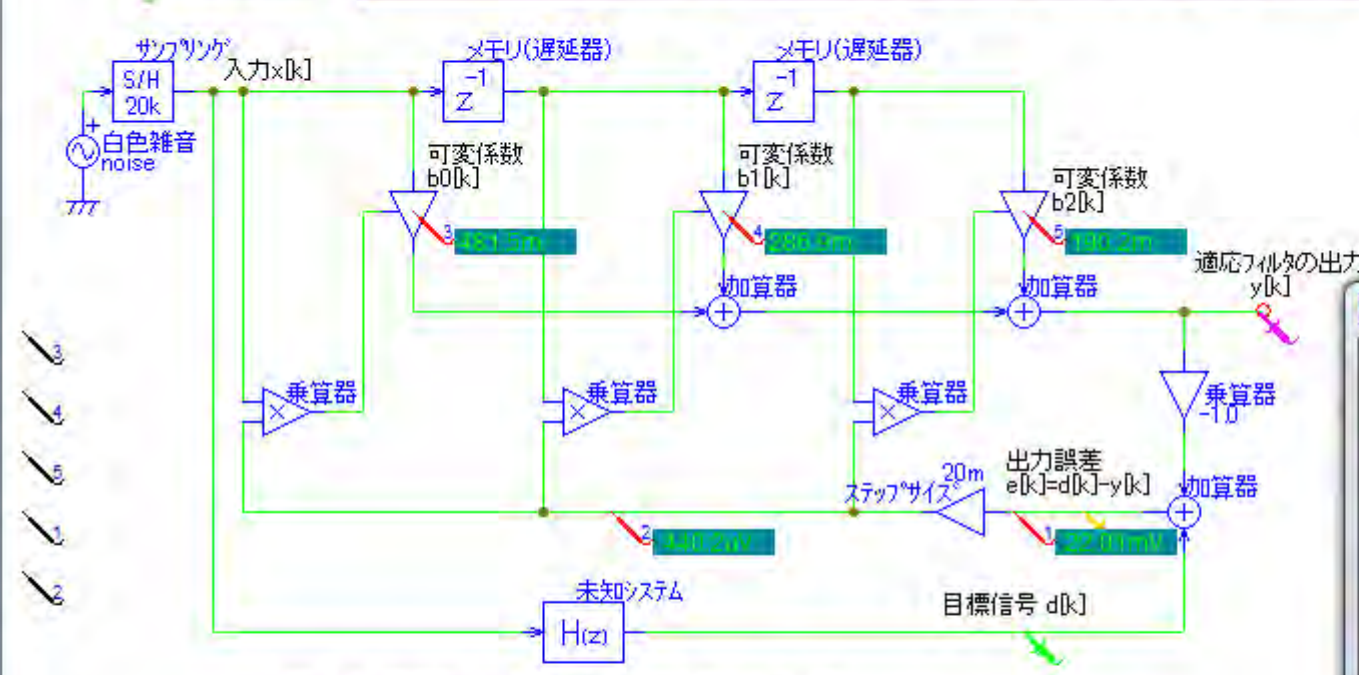


図 3-6 適応フィルタによる未知のシステムの推定

それでは、カーソルを8個のデジタルテストのうち、いずれか一つの中央にもっていき、右クリックするとメニュー画面（図3-7）が現れる。そこで、ステップ実行(S)を選択して、デジタルテストの数値の文字色が黄色になることを確認し、解析のリセット(R)を選択する。続いて、いずれかのデジタルテストの数値表示部分にカーソルを移動して左クリックすることにより、1サンプリング時間  $T=1/f_T=0.05$  [ミリ秒]ごとの処理結果が次々と表示される。その際、各デジタルテストの数値の変化のようすを見て、式(3-3)～式(3-6)の係数修正における計算の流れをじっくりと検証してもらいたい。なお、最終的には、デジタルテスト1～3は順に未知システムの乗算係数  $b_0=0.5$ 、 $b_1=0.3$ 、 $b_2=0.2$  となり、システム同定できることになるので、是非とも最後まで見届けてほしい。

- 表示桁数の設定(S) ▶
- 機能の切換え(E) ▶
- 表示をホールド(H)
- ステップ実行(S)
- 解析ステップ時間の設定..(T)
- オシロスコープと連動させる(O)
- 解析のリセット(R)
- 使用を終了する(X)

図 3-7 ステップ実行画面