[試して納得！　わかるディジタル信号処理　入門編]

メイン　序章　第一章　第二章　第三章　第四章　付録　操作方法　実験室　各種設定の変更　本書の情報

試して納得！

IS Book
Interactive Simulation Book

わかる
ディジタル信号処理
入門編

東京電機大学教授　工学博士　三谷政昭　著

最初から始める　　続きから始める

【試して納得！】シリーズ刊行にあたって

ディジタル信号処理（DSP：Digital Signal Processing）技術は，通信や音声＆画像処理，制御，計測などの多彩な分野で当たり前のように使用される要素技術なので，今こそ，この技術をしっかりと使いこなせる専門家が求められています．

最近，学生や社会人の方々から，「DSPの基本的な原理を体系的にまとめた解説書があれば助かるのになあ」という声をよく耳にします．そんな声にお応えすべく，DSPの基本を体系的にまとめ，徹底してわかりやすく，インタラクティブ（Interactive，対話的）にシミュレーション（Simulation）しながら，“楽しく読めて，目で見て，直感的にわかる”ソフトを世に出したいものだと常々考えていました．

ところで，2005年9月に発刊した電子回路向け【楽して学ぶ】シリーズは，“Interactive Simulation Book”略して『IS Book（アイエス・ブックと読む）』と称するソフトであり，世界で初めてのシミュレータ内蔵「電子教科書＆参考書」です．そこで，電子回路向けの【楽して学ぶ】シリーズのコンセプトを踏襲し，DSP解説書の実現に向けて，新たなシミュレーション・ソフトとして，【DSPシミュレータ・ソフト「商品名ディー・エス・ピー・アナライザ（DSP Analyzer）」】が開発されました．そうして，株式会社マイクロネット（信州事業所所長：浜三弘 氏）との産学連携により，DSPシミュレータを内蔵した『IS Book』として，新シリーズ【試して納得！】の発刊にこぎつけた次第です．

少々手前みそですが，DSPがどんなものなのかをすばやく知って，即座に活用するための“特効薬”となるように，「今日から使える，使いこなす，使いこなせる」ための基礎を小気味よく解説してあります．

「開けてビックリ！！　玉手箱」じゃあないけれど，本シリーズのテキスト（CD－ROM）をパソコンに突っ込んで，スイッチオン．すると，どうでしょう．仕掛け絵本のように，回路図，回路部品，工作道具，オシロスコープなどが飛び出してきます．そうして，テキストの説明を読みながら，DSPのリアルタイム・シミュレーション実験が体感できて，基礎から応用までを習得できるように，数多くの工夫が凝らしてあります．

（1）数式の使用をできるだけ避けること

数式は一つの言葉なので，物理的なイメージと結びつけることが大切です．ただやみくもに数式を暗記するだけでは，内容がさっぱりわからないというジレンマに陥ってしまいます（いわゆる，「理数離れ」症候群）．そのため，数式の表現力に頼ることをできるだけ避けて，数式を物理的な言葉で“翻訳”した表現を心がけ，みなさんの「数式に対するアレルギー」を取り去ってもらいます．そうして，直感的な理解，イメージをみなさんに植え付けます．なぜなら，物の本質の理解には順序だった（へ?）理屈も大切ですが，これ以上に重要なものは「直感的な理解，イメージ」なのですから（筆者の経験から言えることですが...）．

（2）説明の順序を理解しやすい並びにすること

みなさんの理解しやすいことを目標に，いままでのDSPの参考書にありがちな内容説明の流れにとらわれず自由な形で構成しました．

（3）チェックBoxで理解したかどうかを自己評価できること

原則として見開き1～2ページで説明を終える形式とし，*check BOX* の質問で理解度を確認できるようになっています．

本書は，DSPが初めてという人，専門書を読んではみたが難しくてどうもとっつきにくい，わかりにくいと困っている人をとくに意識して，わかりやすく解説してあります．なお，すでに勉強したことがある人でも，副読本や復習のための参考として役立ててもらえるものと思います．

また，わかりやすく系統立てて段階的に習得できるようになっていますから，しっかりと読み進んでいってもらう過程において，短期間にディジタル信号処理の基礎から応用までの必須知識をスムーズに身につけてもらえるものと確信しています．

最後まで読破したあとには，webサイトに「応用問題」があります．どのぐらいの実力がついたのか，確認ができます．サイトへ（要登録）

終わりに，【試して納得！】シリーズを読破されたみなさんには，実践的な経験を通して，ディジタル信号処理に精通した技術者として活躍されんことを期待しつつ，筆を置くことにします．

平成20年8月　　　著者しるす

目次

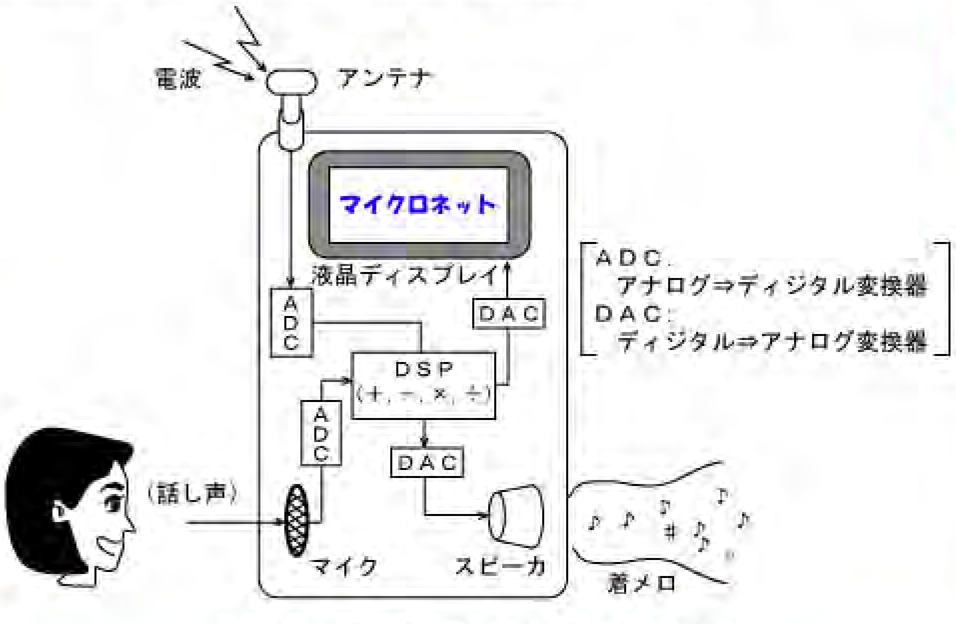
第一章　体感してみよう「ディジタル信号処理って何なの？」

空気や水と同じように，なくてはならないものになりつつある“携帯電話”．一人一台といった感じで，めざましい普及を遂げた携帯電話は，メールしたり，おしゃべりしたり，テレビを見たり，写真をとったり，財布になったり，……と多彩な能力があり，超人気を博している．これほどまでに携帯電話が皆さんを虜（とりこ）にするのに大きな役割を果たしているのが，実は，

≪ ディジタル信号処理 ≫

とよばれる技術で，加減乗除（＋，－，×，÷）の四則計算で実現されているのだ．

「うっそー，ホントに？！」という感じで，不思議に思われるかもしれない．でも，「本当に携帯電話は四則計算で実現されている」んですね．着メロやテレビ映像だって，四則計算で作れるって言うわけ．つまり，テレビ，カメラ，電話，財布などに変身するマジックの仕掛け人が，四則計算ということになる．



イラスト図1-1　携帯電話とディジタル信号処理

本章では，信号を微分したり，不要な信号を除去したり，必要な信号を抽出したり，……と，ディジタル信号処理を擬似体験してもらおう．体験する信号処理は，ディジタル・フィルタと称する“信号の分別，切り分け処理”であり，ゴミの分別処理やコーヒーのドリップのようなものと言える．

イラスト図1-2 ディジタル・フィルタを例えてみれば・・・

具体的には，入力信号に含まれる周波数成分の高低に応じて，出力する割合（ゲイン；gain）をコントロールするものである．理屈はともかく，本書に組み込まれているディジタル信号処理シミュレータ“DSP Analyzer”（DSPアナライザ）を動かすことにより，皆さんにはディジタル信号処理を思う存分楽しんでいただきたい．なお，DSPはDigital Signal Processing（ディジタル信号処理の英語）の頭文字を並べたものである．

一の１　小学一年生でも作れるディジタル・フィルタ

ディジタル信号処理という言葉からは，何となく難しそうな内容で嫌だな，やりたくないと思われるかもしれない．でも，そんなご心配は要らない！　なぜなら，小学一年生の算数で最初に学ぶ“たし算（＋），ひき算（－）”を利用するだけで，ディジタル信号処理を体験できるんだから．

試しに，図1-1のディジタル・システムにおいて FREEZE スイッチをはずして（左クリックして），動かしてみよう．“ひき算”するだけの回路で，周期 0.4[秒]の方形波の入力信号（緑色）から，パルス波形（ピンク色）の出力信号が得られている．いったい，どんな信号処理なのかな？　実は，驚くことなかれ，高校数学で習う“微分”という信号処理を実現して，入力信号が 0[V]から 1[V]に，あるいは 1[V]から 0[V]に変化するところを検出しているんだな．

つまり，メモリと減算器を用いて，高校数学の“微分”が小学一年生の算数の“ひき算”で置き換えられたということなのだ．ある関数 $x(t)$ の $t=t_0$ における接線の傾き（微分値）が，微小値 Δt に対して，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0)-x(t_0-\Delta t)}{\Delta t} \qquad (1\text{-}1)$$

で定義されることを思い起こしてもらえれば明白であろう（図1-2）．式（1-1）の分子の“ひき算”が“微分”と密接に関係するのである．例えば文字画像（黒1[V]，白0[V]）に“ひき算”を適用すれば，輪郭を取り出すことだってできるというわけ（図1-3）．

つまるところ，画像の輪郭や信号変化点を取り出すことが，小学一年生の“ひき算”で実現できるわけだ．まあ「ディジタル信号処理なんて，恐るるに足らず」である．なお，厳密ではないけれど，“たし算”を“積分”に等価だと見なせるので，このことも記憶に留めておいてもらいたい．

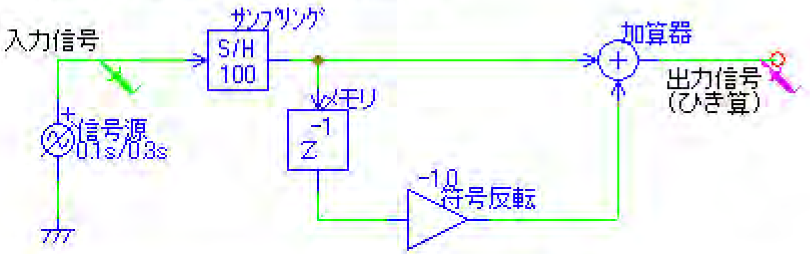
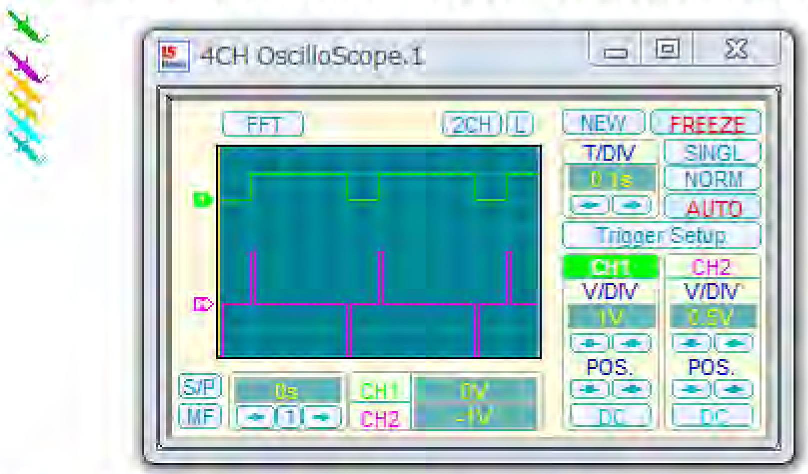


図 1-1　小学一年生の算数で実現するディジタル・フィルタのシステム構成例



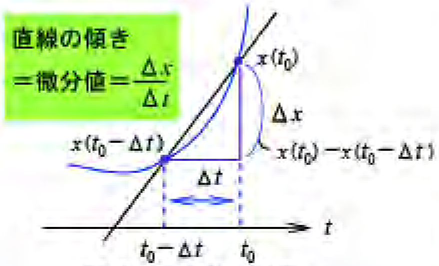


図 1-2　微分の定義

図 1-3　文字画像の輪郭抽出

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

図1-1の入力信号を三角波（パラメータ変更，立上時間 0.1[秒]，立下時間 0.4[秒]）に変えると，出力信号はどのような波形になるか．

① 三角波　② 方形波　③ 正弦波　（答）2

解答欄について

一の4 ローパス（低域通過）特性

ここでは，図1-9に示すメモリ1個，乗算器2個，加算器1個で構成されるディジタル・システムのゲイン特性を調べてみよう．ただし，横軸は周波数で単位は[Hz]，縦軸はゲイン(≧0)を表す．

ところで，一の2 の説明より，サンプリング時間（あるいは，サンプリング間隔）を T [秒]，サンプリング周波数を f_S[Hz]と表せば，互いに逆数の関係にあるので，

$$T=\frac{1}{f_S}\ [秒] \tag{1-3}$$

である．よって，図1-9では，サンプリング周波数 $f_S=1$[kHz]$=1000$[Hz]なので，サンプリング時間 T は 1/1000[秒]$=1$[ms]となる．

また，図1-9の表示周波数の範囲が0～500[Hz]となっているが，最大周波数 500[Hz]は，サンプリング周波数 $f_S=1000$[Hz]の半分 $f_S/2$ に相当する．一般的に，ディジタル・システムで処理可能な最大周波数 f_{max} は，サンプリング周波数 f_S（あるいは，サンプリング時間 T）によって決まり，

$$f_{max}=f_S/2 \tag{1-4}$$

$$f_{max}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{1}{2T} \tag{1-5}$$

となる（**サンプリング定理**）．

以上より，図1-9のゲイン特性から，400[Hz]以上の高い周波数に対してはゲインが0に近い（入力信号を通りにくくする働き），他方100[Hz]以下の低い周波数に対してはゲインが1に近い（入力信号をそのまま通そうとする働き）ことが読み取れる．この「低い周波数が通りやすい」という性質は，低い周波数をロー(low)，通りやすいことをパス（pass）と言い換えて，**ローパス**（low-pass；**低域通過**）特性とよばれる（図1-10）．このように，周波数の高低によって信号の「通りやすさ」をコントロールすることは**周波数選択性**，周波数選択性を有するディジタル・システムは**ディジタル・フィルタ**とよばれる．

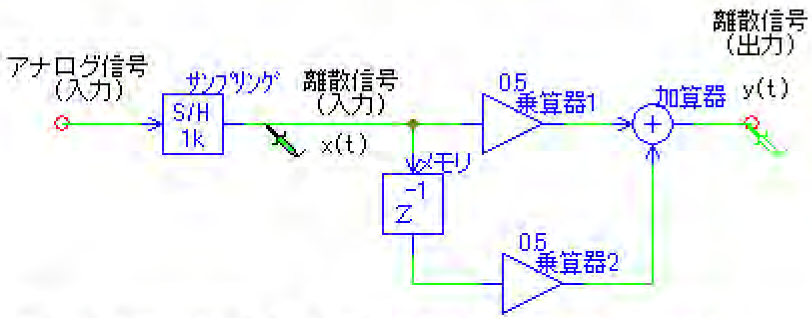
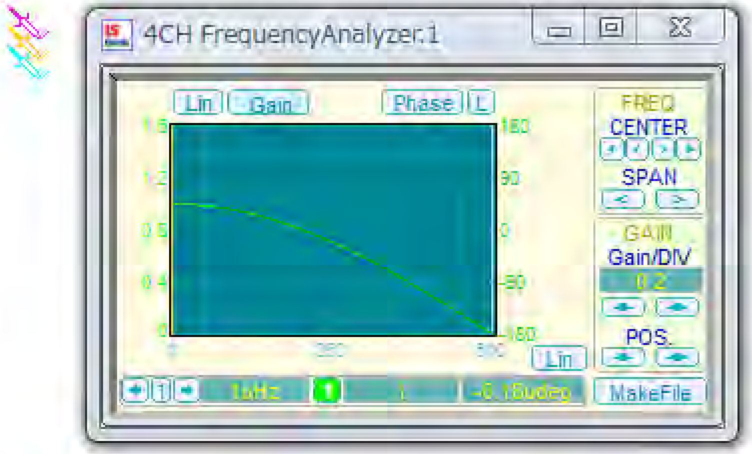


図 1-9　ローパス（低域通過）特性を有するディジタル・システム



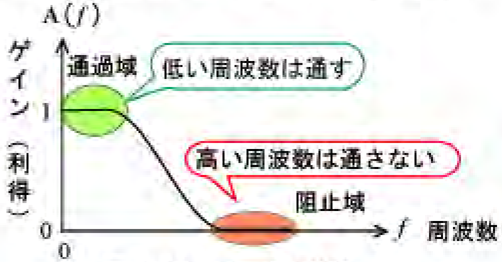


図 1-10　ローパス特性

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

CDプレーヤで 20[kHz]の音を再生したい．このときのサンプリング周波数として適当なものを選べ．

① 10[kHz]　② 20[kHz]　③ 50[kHz]　（答） 3

一の６　ハイパス（高域通過）特性

こんどは，図1-13に示す1個のメモリ，1個の加算器，2個の乗算器から構成されるディジタル・システムのゲイン特性を調べてみたい．

まず，図1-9のローパス特性のディジタル・システムとの違いを見つけられるかな？違いは一つで，乗算器２の係数（タップ係数，タップ利得，乗算係数などという言い方もある）がローパス特性の（+0.5）から符号が反転して，（−0.5）に変わっている．すなわち，入力信号 $x(t)$ と出力信号 $y(t)$ の間には，図1-13を参照して，

$$y(t)=0.5x(t)-0.5x(t-T) \qquad (1\text{-}10)$$

で計算される．また，

$$y(t)=\frac{x(t)-x(t-T)}{2} \qquad (1\text{-}11)$$

のように別表現すれば，入力信号の隣り合う二つの信号値の差の 0.5（=1/2）倍したものに相当することも分かる．ここで，一の１ ～ 一の３ での説明をもう一度思い出してもらいたい．

すると，図1-13のゲイン特性から，100[Hz]以下の低い周波数に対してはゲインが0に近い（入力信号を通りにくくする働き），他方400[Hz]以上の高い周波数に対してはゲインが１に近い（入力信号をそのまま通そうとする働き）ことが読み取れる．この「高い周波数が通りやすい」という性質が，高い周波数をハイ（high），通りやすいことをパス（pass）と言い換えて，ハイパス（high-pass；高域通過）特性とよばれる（図1-14）．

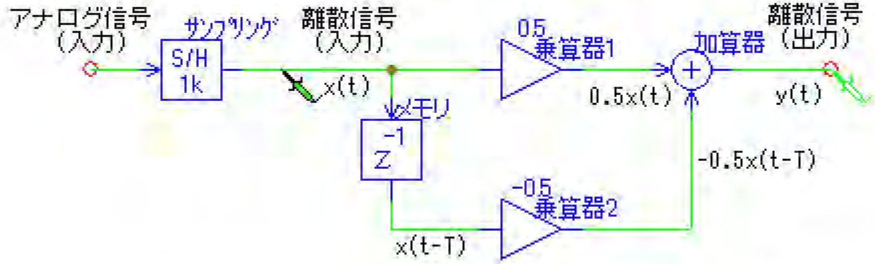
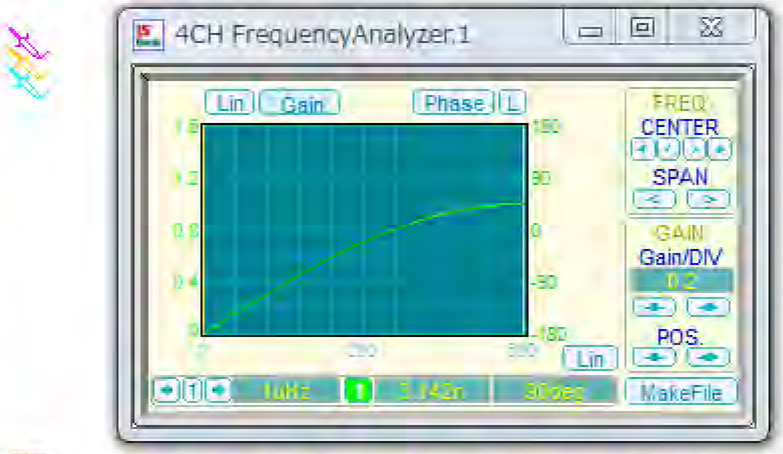


図 1-13　ハイパス（高域通過）特性を有するディジタル・システム



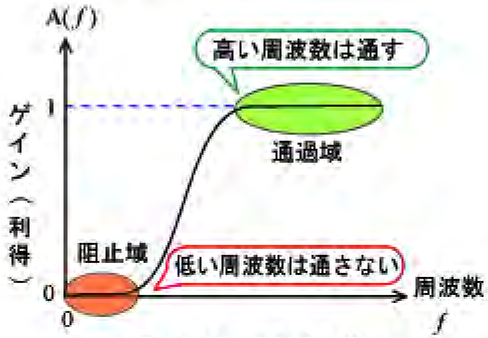


図 1-14　ハイパス特性

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し"ENTER"キーを押す）
図1-13の乗算器１の係数を（−0.5）に変えたときのゲイン特性を選べ．
① ハイパス特性　② ローパス特性　（答）

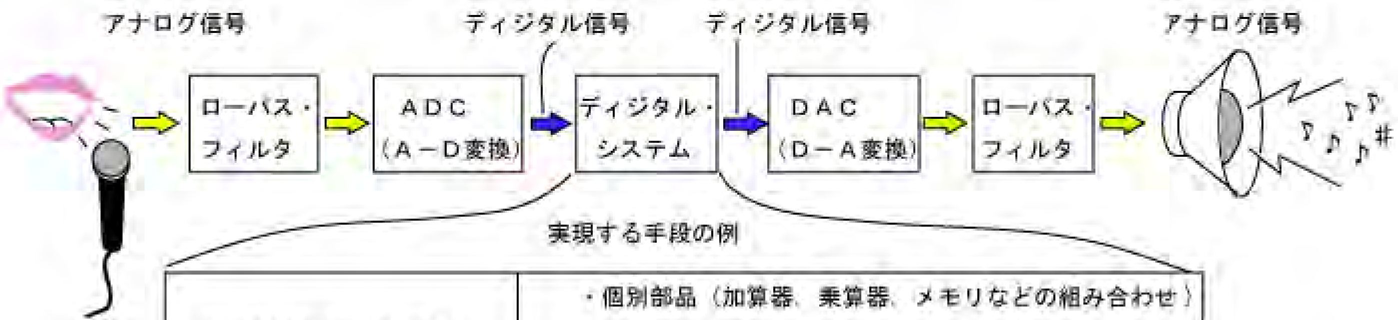
第二章

ディジタル信号処理のシステム構成を理解しよう

「世の中，何でもディジタル」と言われるように，ディジタルなくしては生きていけないという気がしないでもない．でも，ディジタル技術で処理されるディジタル信号は数値データであり，人間は直接“感じる”ことができない．なぜなら，私たちが見たり感じたりできる物理現象（音，絵，光，温度，圧力，ジェスチャなど）は，すべて時間の流れに対して連続的に変化するもの，アナログ信号なのだから．

ところで，基本的にディジタル信号処理では，アナログ信号に対してディジタル的な手段により処理が実行される（イラスト図2-1）．そのため，アナログ信号をディジタル信号に“変換”したり，ディジタル処理した結果を見たり感じたりできるアナログ信号に“変換”しなければならない．この“変換”というアナログとディジタルの橋渡しをするものは，ＡＤＣ（アナログ⇒ディジタル）とＤＡＣ（ディジタル⇒アナログ）とよばれるデータ変換器である．

本章では，ディジタル信号処理システム全体を俯瞰することから始め，アナログからディジタルへの橋渡しをする信号処理“サンプリング（時間に対して連続に変化する信号値を一定の時間間隔で取り出すこと）”を中心に体感してもらう．



ハードウェアによる実現	・個別部品（加算器，乗算器，メモリなどの組み合わせ） ・専用ＬＳＩ ・ＦＰＧＡ（Field Programmable Gate Array）
ソフトウェアによる実現	・汎用ＣＰＵ ・ディジタル・シグナル・プロセッサ（ＤＳＰ，Digital Signal Processor）

イラスト図2-1　ディジタル信号処理システムの構成

二の１

ディジタル信号処理システムと信号

ディジタル信号処理システムの基本的な構成を示すと図2-1のようになり，アナログ信号（analog signal）に対してディジタル的な手段により処理が行われる．図2-1には，各処理ブロックでの信号形態のイメージをいっしょに示している．この図の中で“ディジタル・システム”と書かれているブロックが，四則演算（＋，－，×，÷）に基づくディジタル信号処理に相当する．

ところで，ディジタル信号処理を行うためには，図2-1から分かるように，最初にアナログ信号をディジタル・システムで取り扱えるようなデータ（ディジタル信号；digital signal）に変換する必要があり，ほとんどの場合，処理した結果は再びアナログ信号に戻される．

ブロックa　ローパス・フィルタ（入力側）

アナログ信号に含まれる最高の周波数 f_{max} [Hz] を限定して，　より高い周波数成分をもたないようにする働き（帯域制限）を有し，アンチエイリアシング・フィルタとよばれる．

ブロックb　サンプリング（sampling；標本化）

帯域制限されたアナログ信号を，一定の時間間隔 T［秒］（これをサンプリング時間，あるいは標本化間隔という）ごとに取り出して，その信号値（離散信号；discrete signal）を保持する．サンプリング&ホールド処理ともいう．

ブロックc　量子化（A－D変換）

離散信号からアナログ⇒ディジタル変換して，0と1からなるディジタル信号を得る．

ブロックd　ディジタル・システム

ディジタル信号入力に対し，数値演算処理（加減乗除）を実行してディジタル信号出力を求める．代表例として，ディジタル・フィルタがある．

ブロックe　逆量子化（D－A変換）

ディジタル信号からディジタル⇒アナログ変換して，階段状のアナログ信号としての離散信号を得る．

ブロックf　ローパス・フィルタ（出力側）

離散信号における階段状のギクシャクした部分を平滑化して，最終出力としての滑らかなアナログ信号を得る．スムージング・フィルタという．

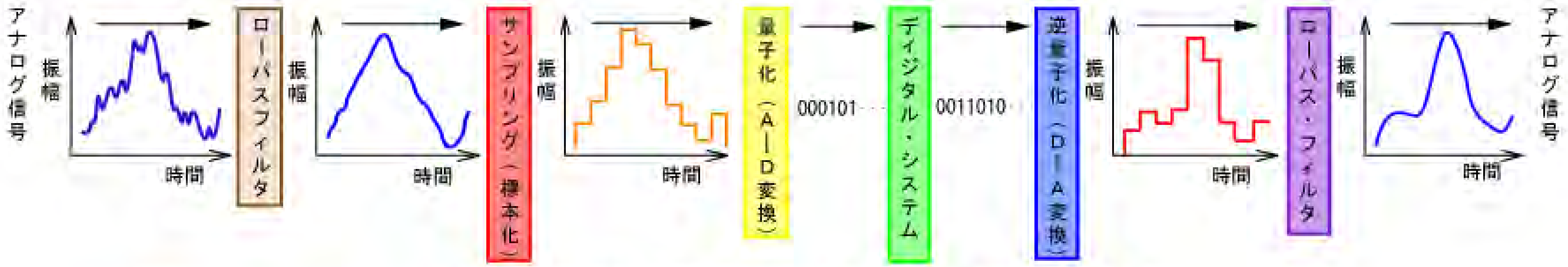


図 2-1　ディジタル信号処理システムと各処理ブロックでの信号のようす

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

ディジタル信号処理システムでは，どんなに高い周波数成分を含むアナログ信号も処理できる．　① 間違っている　② 正しい　（答）1

二の２

サンプリング（標本化）と離散信号【2/2】

次に，アナログ信号入力の周波数 f_{in} を1[Hz]ずつ増減して，周波数に対するアナログ信号と離散信号の変化のようすを調べてみよう（周波数の可変の仕方）．

なお，オシロスコープ上の FREEZE ，続いて NEW の順にクリックして，表示画面をクリアすることを忘れないようにして下さい．その結果からは，高い周波数では粗い近似に，低い周波数では細かい近似になることを目で見て確認することができる（図2-4，CH1（緑色）はアナログ信号，CH2（ピンク色）は離散信号）．つまり，離散信号の近似の度合いを一定にするには，アナログ信号の周波数 f_{in} が高い場合サンプリング時間 T を小さくしなければならない．

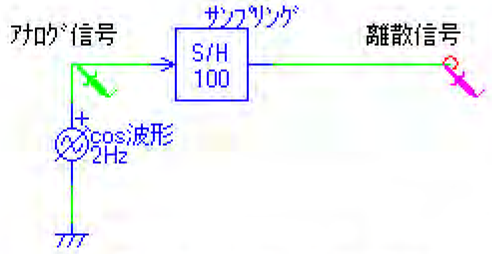
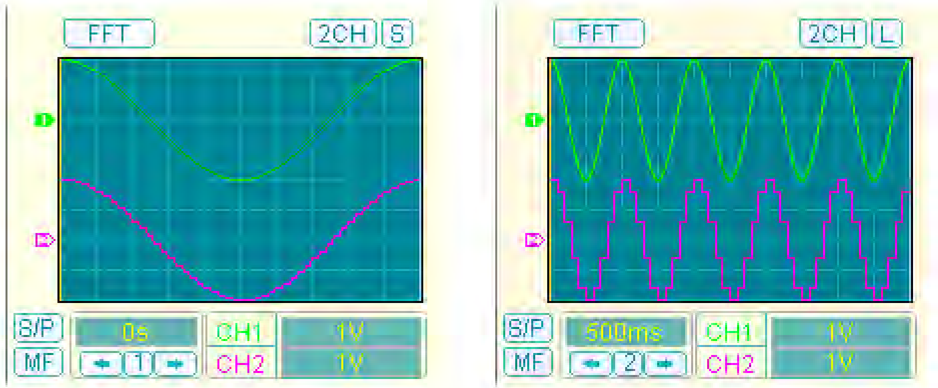
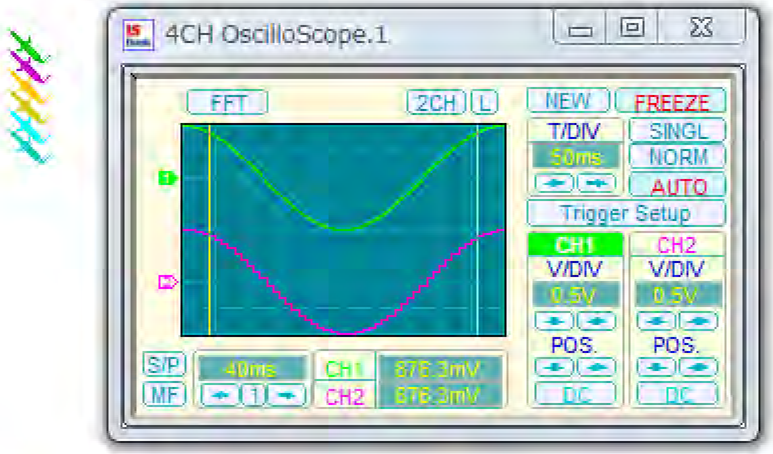


図 2-2　サンプリング（再掲）



(a)　f_{in}=2[Hz]　　(b)　f_{in}=10[Hz]

図 2-4　周波数 f_{in} と離散信号（横軸目盛 T/DIV=50[ms]）



check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）
離散信号では，単位時間あたりの信号値が変化する時刻の総個数が多いほど，細かい信号表現が可能である．
①　間違っている　　②　正しい　　　（答）

二の５

サンプリング（標本化）定理

二の３ と 二の４ では，サンプリング周波数 f_S[Hz]，すなわち１秒間あたりの信号の総個数を大きくする（サンプリング時間 T に換算すると，小さくすることに相当）と，アナログ信号の形状に少しずつ近づけた離散信号が得られることを学んだ．したがって，サンプリング周波数を高くすれば高くするほど望ましいと思われるかもしれない．しかしながら，サンプリング周波数を高くするには，より高速で高価なＡ－Ｄ変換器やディジタル・システムを使用しなければならないというジレンマが出てくる．そのため，サンプリング周波数を適切に決めるための然るべきルールが必要になる．

実は，サンプリング周波数を決定するためのルールこそが，サンプリング定理（あるいは，標本化定理）とよばれるものである．

> アナログ信号が周波数 f_{max}[Hz]以上の周波数成分をもたない（言い換えれば，0～ f_{max} に帯域制限されている）場合，サンプリングによって得られる離散信号から元のアナログ信号を正確に再生するためには，
>
> $$T \leqq \frac{1}{2f_{max}} \qquad (2\text{-}4)$$
>
> を満たす時間間隔［秒］でサンプリングする必要がある．
>
> また，式（2-4）の逆数を取れば，不等号の向きが逆になって，
>
> $$f_S \geqq 2f_{max} \qquad (2\text{-}5)$$
>
> となり，アナログ信号に含まれる最高周波数 f_{max}[Hz]の2倍以上のサンプリング周波数 f_S（＝1/T）[Hz]を必要とする．

例えば，アナログ信号（緑色）を10[Hz]のcos波として，サンプリング周波数を20[Hz]とするとき，離散信号（ピンク色）がどのような波形になるのかを見てみよう（図2-10）．すると，離散信号の正負を交互にとるパルス波形が読み取れる．サンプリング定理で数学的には正しいが，パルス波形から元のアナログ信号のcos波が再生されるのは不思議な感じがしないでもない．

次に，アナログ信号の周波数をいろいろな値に変えてみてもらいたい．一例として，10[Hz]より少し低い周波数 9.4[Hz]に変えると，離散信号はcos波というようよりも 三の11 の振幅変調したような波形が現れる．実は，振幅変調したような離散信号は，9.4[Hz]と10.6[Hz]のcos波を加算して合成したものだ（電圧源を入れ替えて確認できる）．つまり，この信号はサンプリング定理を満足していないことが分かる．

なお，実際にはサンプリング周波数をサンプリング定理で決まる周波数よりも，さらに1～2割程度高めの値に設定する必要がある．例えば，音声電話（0.3～3.4[kHz]の周波数成分を送受信する）のサンプリング周波数は，理論上は，3.4[kHz]の 2倍で 6.8[kHz]であるが，実際は2割程度の余裕をみて8[kHz]と決められている．

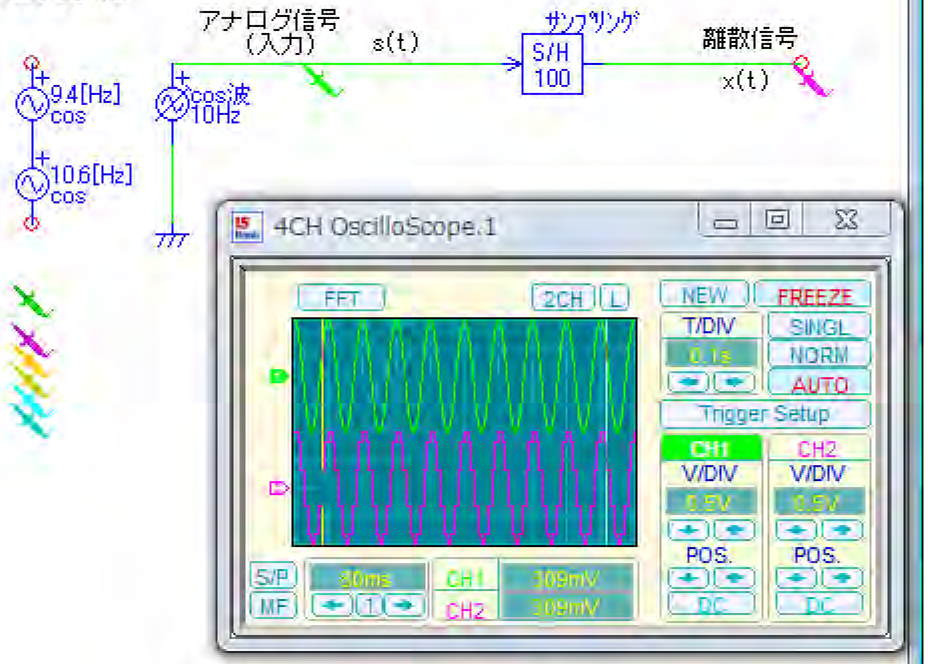


図 2-10　サンプリング定理

知っ得！[1]

二の９　量子化（Ａ－Ｄ変換）とビット数

ここでは，離散信号（アナログ量）をディジタル量に置き換える処理（量子化，quantization）として，アナログ－ディジタル（Ａ－Ｄ）変換するプロセス（図2-1のブロックcに相当）について説明する．量子化の簡単な例を示そう．

まず，図2-14において，マウスのカーソルをサンプル＆ホールド器（サンプリング S/H 1k）の中央に持っていって左ダブル・クリックすると，サンプル＆ホールド器の設定ウィンドウ画面が現れる．画面では，「量子化ビット数，入力電圧範囲」の二つのパラメータを設定できる．ただし，LSB は Least Significant Bit の頭文字で，量子化ステップということもある．なお，[量子化の設定]で浮動小数点をチェックすると，アナログ量に一致する．

いま，量子化ビット数が 2 ビット（bit），入力電圧範囲が±1[V]に設定すると，量子化ステップ(1LSB)は 0.5[V]になる．つまり，(−1)～(+1)の範囲のアナログ量が $4(=2^2)$ 段階のディジタル量(−1，−0.5，0，+0.5)に変換される（表2-1）．

一般に，Lビットで入力電圧範囲が±E[V]に対して，量子化した時の 1LSB電圧Δは，

$$\Delta=\frac{+E-(-E)}{2^L}=\frac{E}{2^{L-1}} \qquad (2\text{-}8)$$

で与えられ，電圧のディジタル量として取り得る値は，

$$(-2^{L-1}\cdot\Delta),\ (-2^{L-1}+1)\Delta,\ (-2^{L-1}+2)\Delta,\ \cdots,\ (-2\Delta),\ (-\Delta),\ 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \cdots,\ (2^{L-1}-2)\cdot\Delta,\ (2^{L-1}-1)\cdot\Delta \qquad (2\text{-}9)$$

の 2^L 段階のレベルである．

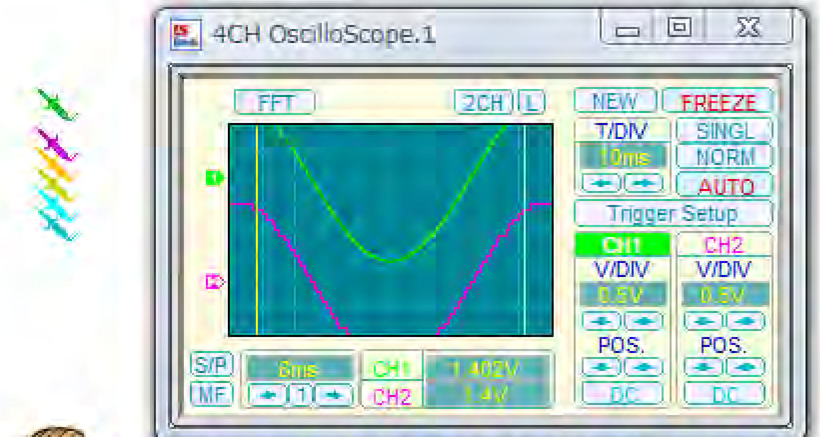
以上のことに基づき，図2-14の量子化ビット数を 3，4，5，…と増やし，FREEZE と NEW スイッチを交互に左クリックした後，ディジタル量の数値を読み取ることで，式（2-9）を確認してください．もちろん，量子化ビット数を大きくすればアナログ量に近づくことになる．

表 2-1

10 進数表現（アナログ量）	2 進数表現（ディジタル量）
+0.5	0△1
0	0△0
-0.5	1△1
-1	1△0

（△ は小数点を示す）

図 2-14　量子化（Ａ－Ｄ変換）



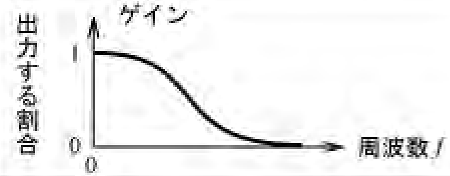
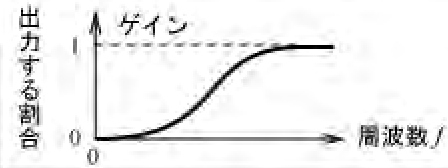
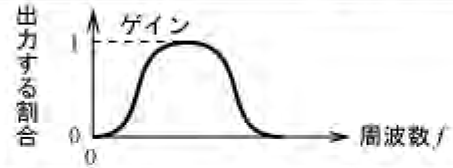
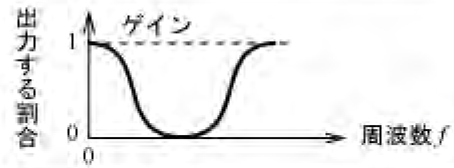
check BOX（正解と思う数字を半角で入力し "ENTER" キーを押す）
±1.6[V]の電圧を5ビットで量子化したとき，最大値は+1.55[V]である．
① 間違っている　② 正しい　（答）1

第三章　いろいろなディジタル信号を見て，試してみよう

本章では，最初にインパルス信号，雑音（ノイズ；noise）などのディジタル信号を発生して，オシロスコープで波形の形状，FFT（高速フーリエ変換）により周波数スペクトル成分を目で見て確認する．

次に，雑音や複数の周波数を含む合成信号を生成して，各種ディジタル・フィルタに入力したときに得られる出力信号の特徴を調べる．つまり，入力周波数の高低に対して出力信号の大きさをコントロールする（フィルタリング）機能について，シミュレーション・ソフトで試してみるのだ．その結果に基づき，フィルタの重要な働きとしての周波数選択性を実感してもらう（表3-1）．

表 3-1 ディジタル・フィルタの周波数選択機能

名称	周波数選択特性（ゲイン特性）
ローパス・フィルタ（ＬＰＦ：Low-Pass Filter）	
ハイパス・フィルタ（ＨＰＦ：High-Pass Filter）	
バンドパス・フィルタ（ＢＰＦ：Band-Pass Filter）	
バンドエリミネート・フィルタ（ＢＥＦ：Band-Eliminate Filter）	

三の７　ローパス・フィルタで何ができるの？

さっそく手始めに，周波数20[Hz]のsin波に雑音を加えた信号を，一の５ のローパス特性を有するディジタル・システム（ローパス・フィルタ；Low-Pass Filter，これ以降LPFと略記）に印加してみよう（図3-17）．オシロスコープの入出力波形から，入力信号の細かくでこぼこしたギザギザ（高い周波数成分がある）の信号（緑色）が，隣り合う信号の平均計算，すなわち，

$$y(t)=\frac{x(t)+x(t-T)}{2}=0.5\times\{x(t)+x(t-T)\}\quad ;T=1[\mathrm{ms}]=0.001[\text{秒}] \tag{3-11}$$

を実行すること（移動平均）により，大きな滑らかな信号（低い周波数成分）としてのピンク色のカーブが出力されている．つまり，高い周波数成分の雑音が LPFによって取り除かれ，低い周波数成分が取り出されたことが分かる．

それでは，メモリの個数を2個に増やしてみよう．メモリ2をドラッグ&ドロップして移動し，乗算係数 0.5を 0.33に書き換えてもらいたい．すなわち，

$$y(t)=\frac{x(t)+x(t-T)+x(t-2T)}{3}=0.33\times\{x(t)+x(t-T)+x(t-2T)\} \tag{3-12}$$

という移動平均計算で，隣り合う 3個の入力信号の平均値を求めると，2個の平均値よりも雑音を少なくできることが分かる．

さらに，残り一個のメモリ3をドラッグ＆ドロップして移動し，乗算係数 0.33を 0.25に書き換えて，隣り合う4個の入力信号の平均値として，

$$y(t)=\frac{x(t)+x(t-T)+x(t-2T)+x(t-3T)}{4}$$
$$=0.25\times\{x(t)+x(t-T)+x(t-2T)+x(t-3T)\} \tag{3-13}$$

で表される移動平均計算によって，雑音をもっと少なくできる．このようにメモリの個数を増やして平均値を採れば，雑音を除去する能力を高めることも理解される．

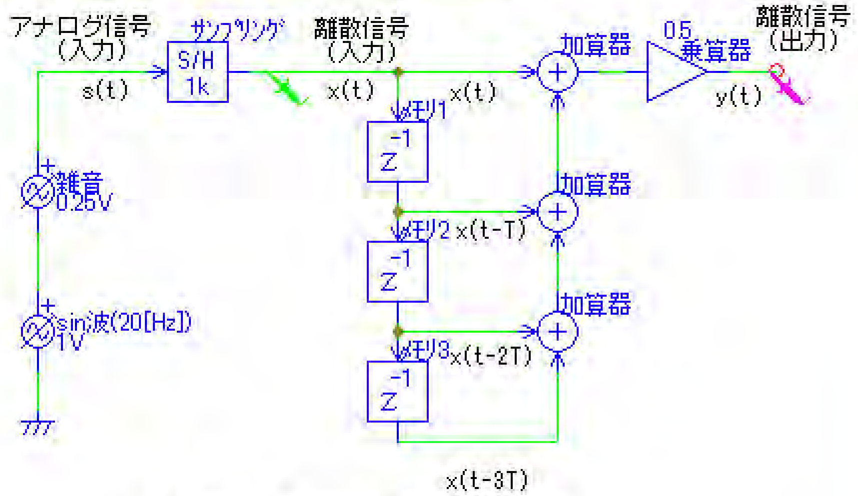
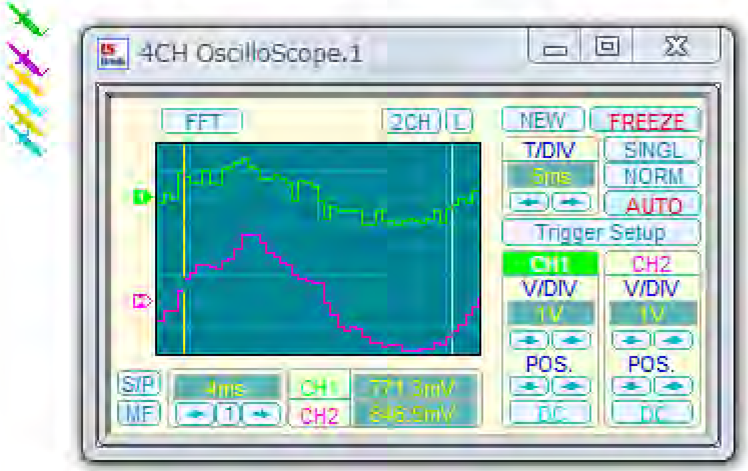


図 3-17　ローパス特性による雑音除去



check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

式（3-11）の入出力関係で表されるLPFにおいて，インパルス $\delta(t)$ の入力に対する出力応答は，$y(t)=0.5\delta(t)+0.5\delta(t-T)$ となる．

① 間違っている　② 正しい　（答） 2

三の11

AMラジオの信号波形を作ってみよう【2/2】

以上より，1個の加算器と1個の乗算器を用いて，図3-23のように回路構成すると振幅変調が実現される．図3-23では，左端のcos波交流電源（変調信号 $s(t)$ に相当）の周波数は5[Hz]で，電圧0.5[V]は可変できるようになっている．変調度 m を0.1のステップで変えられるので，変調信号 $s(t)$ の信号電圧をいろいろな数値に設定してAM波形 $y(t)$ の違いを調べてもらいたい．なお，もう一つのcos波交流電源（搬送波に相当）の周波数は40[Hz]で1[V]としてある．

まず，変調度 $m=0.5$，1，1.5として，オシロスコープに表示されたAM波形の形状について，FREEZE，NEW，FREEZE の順に左クリックして波形表示を止め，比べてみて下さい．変調度 $m=0.5$，1のときは正常なAM波が得られるが，$m=1.5$ では過変調状態になって波形歪(ひず)みの発生が見られる．

次に，オシロスコープ画面の FFT スイッチを左クリックすると，波形の周波数スペクトルを調べることが可能になる．例えば，変調度 $m=0.5$ に対するAM波形に含まれる周波数スペクトルの様子を図3-24に示す．なお，FFT スイッチの右に表示されている1～3のチャネル番号を左クリックして，搬送波（ピンク色），入力信号（変調信号，緑色），出力信号（AM波，オレンジ色）のみの周波数スペクトルを表示することにより，振幅変調による周波数スペクトルの変化を読み取ってもらいたい．その結果として，入力の変調信号の周波数が5[Hz]であること，AM波のスペクトルが35，40，45[Hz]の3つの周波数をもつことが確認できる．搬送波は40[Hz]，変調信号は5[Hz]のcos波であるにも関わらず，新しい周波数成分の35，45[Hz]が発生していることに不思議さを感じた人も多いと思う．その理由についての詳細は，姉妹書

「楽して学ぶシリーズ　わかる電子回路入門の入門（IV）～オペアンプ実用編～」の第3章を参考にしていただきたい．

知っ得！【5】

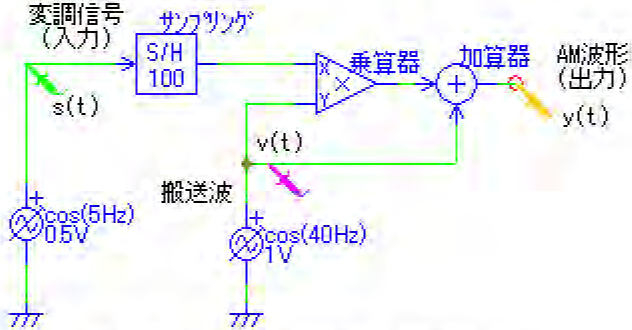


図 3-23　AM（振幅変調）の信号波形

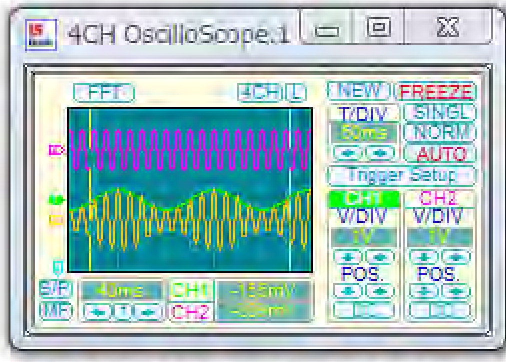


図 3-24　AM（振幅変調）の信号波形

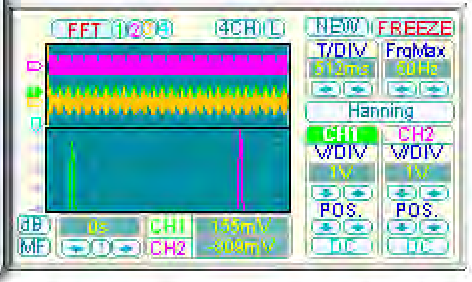


図 3-25　フーリエ解析によるAM波の周波数スペクトル表示例

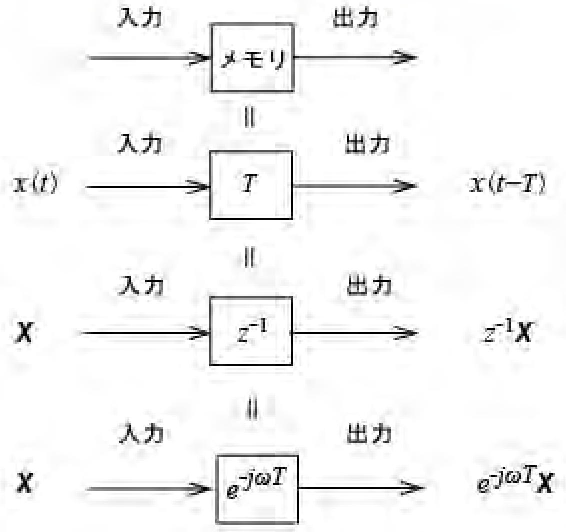
第四章

ディジタル信号処理の数式表現に親しもう

ディジタル信号処理のコアは四則計算なので，計算式がキーポイントである．例えば，地デジの映像を受信・表示したり，携帯電話がサウンド・プレーヤになったり，……と，身の周りにはディジタル信号処理が組み込まれた製品が数多いのだが，その中身は「数式に基づく計算処理」という驚くべき事実がある．つまり，信号処理の中身を表す計算式に秘密が組み込まれているわけで，数式表現の意味を深く読み取れるようにしておくことが重要である．

本章では，ディジタル信号処理の数式表現を取り上げて，伝達特性（ゲイン，位相）を中心に説明する．とくに，伝達特性の計算については，複素数による計算テクニックをじっくりと味わってもらいたい．

また，ディジタル信号を一時記憶しておくためのメモリの伝達特性が，変数 z^{-1} で表されることを示し，周波数によって変化するようすを紹介する（イラスト図4-1）．



イラスト図4-1　メモリの伝達特性のいろいろな数式表現

四の４　時間のずれと位相

ここでは，四の３の式（4-27）の偏角 $\phi=-\pi/4$ について説明する．

$$\begin{cases} x(t)=5\cos(20\pi t)+5\sin(20\pi t) & \text{（4-22）の再掲} \\ \boldsymbol{X}=5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}},\quad x(t)=5\sqrt{2}\cos\left(20\pi t-\dfrac{\pi}{4}\right) & \text{（4-26）の再掲} \\ A=5\sqrt{2},\quad \phi=-\pi/4 & \text{（4-27）の再掲} \end{cases}$$

まず，図4-7において，合成波形（CH1，緑色）と基準となるcos波形（CH2，ピンク色）との時間のずれ Δ[秒]を測定してみると，

$$\Delta=12.5\,[\mathrm{ms}] \qquad (4\text{-}28)$$

である（時間差の測定手順）．

また，周波数 $f=10$[Hz]の周期 T_P[秒]は，式（4-2）より，

$$T_P=0.1\,[\text{秒}]=100\,[\mathrm{ms}] \qquad (4\text{-}29)$$

であり，角度に換算すると 2π[rad]＝360[度]なので，時間のずれ Δ[秒]は式（4-28）と式（4-29）より，

$$2\pi\times\frac{\Delta}{T_P}=2\pi\times\frac{12.5}{100}=\frac{\pi}{4}\ [\mathrm{rad}] \qquad (4\text{-}30)$$

と表される．よって，基準となるcos波形を右に平行移動したものをマイナス（－）で表せば，式（4-30）より $(-\pi/4)$ と表され，式（4-25）の偏角 $(-\pi/4)$ に一致することが分かる．

このように，cos波形を基準波形にして，時間のずれを角度に換算した値が位相（フェーズ，phase）とよばれるものである．位相がプラス（＋）であればcos波形を左に，マイナス（－）であればcos波形を右に平行移動したものになる（図4-8）．例えば，cos波形の周波数 f[Hz]，あるいは角周波数 ω[rad/秒]のとき，

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)=A\cos\left\{\omega\left(t+\frac{\phi}{\omega}\right)\right\} \qquad (4\text{-}31)$$

と式変形すれば，ϕ[rad]/ω[rad/秒]＝ϕ/ω[秒]という物理単位であることから，時間のずれ t_d[秒]と位相 ϕ[rad]の間には，

$$\begin{cases} t_d=\dfrac{\phi}{2\pi f}\quad \text{あるいは}\quad t_d=\dfrac{\phi}{\omega} & (4\text{-}32) \\ \text{時間ずれ}=\dfrac{\text{位相}}{\text{各周波数}} & (4\text{-}33) \end{cases}$$

で表される関係が成立する．なお，位相がプラス（＋）の場合は“進んでいる（進み位相）”，マイナス（－）の場合は“遅れている（遅れ位相）”ともいう．

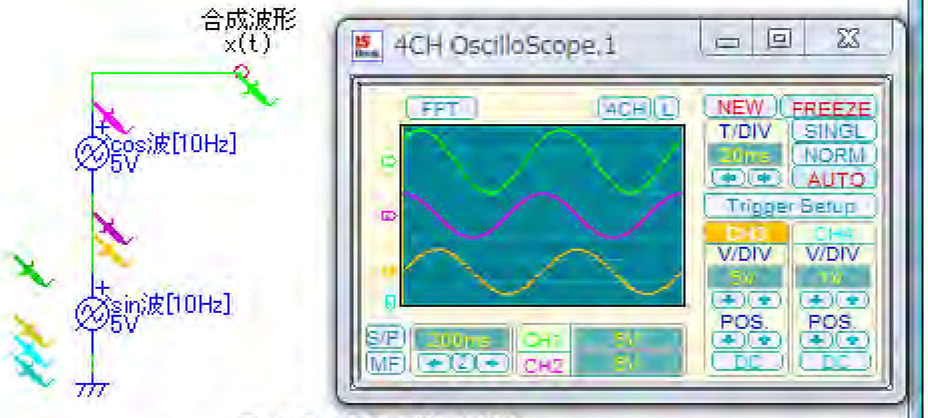


図 4-7　時間のずれと位相

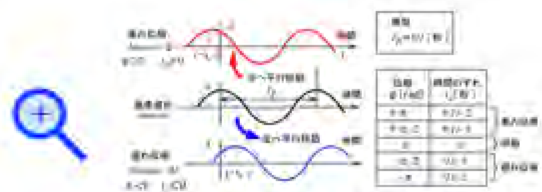


図 4-8　位相と時間のずれ

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し“ENTER”キーを押す）

27

基準信号 $x(t)=3\cos(5t)$ に対して，0.2[秒]進んだ信号 $y(t)$ を $3\cos(5t+\phi)$ と表すとき，位相 ϕ[rad]はいくらになるか．

① 0.2　② －0.2　③ 1　④ －1　（答）

四の６

ディジタル・システムのゲインと位相

いま，あるディジタル・システムに，

$x(t) = X_{max}\cos(\omega t)$　(4-45)

を加えたとき，入力の G（≧0）倍で，位相のずれ ϕ[rad]のcos波形として，

$y(t) = GX_{max}\cos(\omega t+\phi)$　(4-46)

が出力されるとしよう（図4-10）．

ところで，三角関数の公式として，

$\cos(\omega t+\phi) = \cos(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\sin\phi$　(4-47)

となる関係を式（4-46）に適用すれば，

$$y(t) = GX_{max}\cos(\omega t+\phi)$$
$$= (G\cos\phi)X_{max}\cos(\omega t) - (G\sin\phi)X_{max}\sin(\omega t) \quad (4\text{-}48)$$

と変形できる．また，四の１ より，

$A\cos(\omega t)$　⇔　A　式（4-4）の再掲

$B\sin(\omega t)$　⇔　$-jB$　式（4-5）の再掲

となる関係を利用して，式（4-45）と式（4-48）をそれぞれ，

$x(t) = X_{max}\cos(\omega t)$　⇔　$\mathbf{X} = X_{max}$

$y(t) = (G\cos\phi)X_{max}\cos(\omega t) - (G\sin\phi)X_{max}\sin(\omega t)$　⇔

$\mathbf{Y} = (G\cos\phi)X_{max} + j(G\sin\phi)X_{max}$

と複素ベクトル表示すれば，

$\mathbf{Y} = (G\cos\phi)\mathbf{X} + j(G\sin\phi)\mathbf{X}$　(4-49)

である．よって，ディジタル・システムの伝達特性Hは，式（4-36）より，

$H = \dfrac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} = G\cos\phi + jG\sin\phi$　(4-50)

と表され，

$G = |H|$　；ゲイン　(4-51)

$\phi = \angle H$　；位相　(4-52)

に相当する（四の５ を参照）．ここで，ゲインGと位相ϕが周波数 f[Hz]の関数である場合にはそれぞれ $G(f)$，$\phi(f)$，あるいは角周波数 $\omega = 2\pi f$[rad]の関数として$G(\omega)$，$\phi(\omega)$と表す．

また，式（4-45）と式（4-46）の複素ベクトル表示は，式（4-18）の関係を適用して，

$\mathbf{X} = X_{max}$

$\mathbf{Y} = GX_{max}e^{j\phi}$

であり，伝達特性 H は式（4-36）より，

$H = \dfrac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} = \dfrac{GX_{max}e^{j\phi}}{X_{max}}$　(4-53)

と別表現することもできる．なお，式（4−50）と式（4-53）を対比すると，

$Ge^{j\phi} = G\cos\phi + jG\sin\phi$　(4-54)

であり，特に $G=1$ の場合，

$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$　(4-55)

のオイラーの公式に該当する（この関係は，しっかりと脳裏に焼きつけておきたい）．

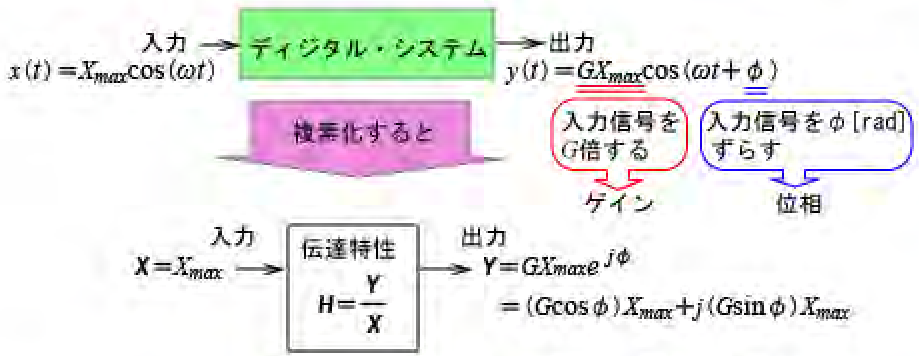


図 4-10　ディジタル・システムのゲインと位相

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し"ENTER"キーを押す）

$\sin(\omega t)$の複素ベクトル表示を求めよ．

[ヒント：$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ という関係と式（4-18）を利用]

① 1　② $-j$　③ $1+j$　④ $1-j$　（答）

四の７　遅延フィルタと周波数特性

それでは，メモリ・ブロック $\boxed{z^{-1}}$ の持つ周波数特性を計算してみよう（図4-11）．なお，メモリは遅延器，遅延レジスタ，レジスタ・メモリなどと呼ばれることもあり，信号をサンプリング時間 T[秒]の間，一時的に保持する．つまり，入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ の間の関係は，

$$y(t)=x(t-T) \tag{4-56}$$

の数式で表現される．

いま，メモリに cos波形 $x(t)=X_{max}\cos(\omega t)$ を入力したときの出力 $y(t)$ は，

$$\begin{aligned} y(t)&=x(t-T)\\ &=X_{max}\cos\{\omega(t-T)\}\\ &=X_{max}\cos(\omega t-\omega T) \end{aligned} \tag{4-57}$$

となるので，T[秒]の時間遅れが位相（$-\omega T$）[rad]に相当することが分かる．

続いて，入出力信号の複素ベクトル表示を求めてみると，式（4-18）より，

$$\mathbf{X}=X_{max}\ ,\ \mathbf{Y}=X_{max}e^{-j\omega T} \tag{4-58}$$

であり，伝達特性 $\mathbf{H}$ は，

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}=\frac{X_{max}e^{-j\omega T}}{X_{max}}=e^{-j\omega T} \tag{4-59}$$

と求められる．つまり，

$e^{-j\omega T}$が位相（$-\omega T$）、すなわち T[秒]の時間遅れに相当する

と解釈できるのである．

そこで，図4-11に示すように，式（4-59）において，

$$e^{-j\omega T}=z^{-1}\quad あるいは\quad z=e^{j\omega T} \tag{4-60}$$

と置いて，T[秒]の時間遅れをメモリ・ブロック $\boxed{z^{-1}}$ と表すのである．

ところで，式（4-59）を直交座標で表すと，

$$\mathbf{H}=\cos(\omega T)-j\sin(\omega T) \tag{4-61}$$

となる（付録 参照）．よって，1個のメモリ・ブロックのゲイン $|\mathbf{H}|$ と位相 $\angle\mathbf{H}$ はそれぞれ，式（4-61）より，

$$|\mathbf{H}|=\left|e^{-j\omega T}\right|=\left|z^{-1}\right|=1 \tag{4-62}$$

$$\angle\mathbf{H}=\angle e^{-j\omega T}=-\omega T \tag{4-63}$$

となる（図4-11の周波数アナライザの画面表示に一致）．このように，メモリ・ブロックは，周波数に対してゲインが1（入力の大きさがそのまま出力）で一定，位相だけが周波数に比例して変化する（線形位相）ディジタル・システムであり，遅延フィルタともよばれる．なお，時間のずれ t_d[秒]は式（4-33）より，

$$t_d=\frac{\angle\mathbf{H}}{\omega}=\frac{-\omega T}{\omega}=-T \tag{4-64}$$

となる．周波数に関わらず（$-T$）[秒]で一定値をとり，符号がマイナス（−）なので T[秒]の時間遅延と解釈される．

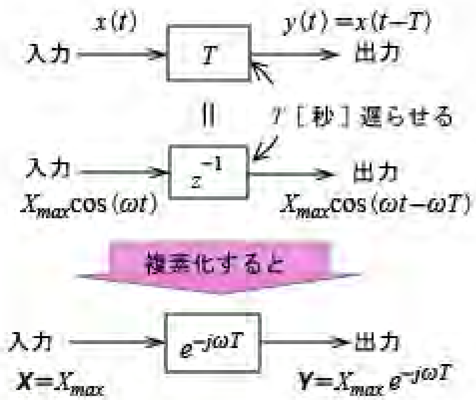


図 4-11　メモリ・ブロックの周波数特性

check BOX（正解と思う数字を半角で入力し"ENTER"キーを押す）

信号 $x(t)=3\cos(2\pi t)$ の複素ベクトル表示 $\mathbf{X}$ を用いると，$x(t)=3\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ はどのように表されるか．ただし，サンプリング時間 $T=0.25$[秒]とする

① $z\mathbf{X}$　② $z^{-1}\mathbf{X}$　③ $z^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}$　④ $z^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$　（答）