

第2章

デジタル信号処理実装の基礎

これからデジタル信号処理をはじめようとする人のために、必要な基礎的な事柄を述べていこうと思います。すでにある程度デジタル信号処理を理解されている方は、読み飛ばしていただいてもかまいません。

2-1 サンプリング定理

自然界の情報、信号はアナログ量がほとんどです。そのため、第1章の図1-15のようにデジタル信号処理を行うためには、まずはアナログ-デジタル変換(A-D変換)が必要です。通常A-D変換では、決められたクロック(サンプリング・クロック)ごとに数値変換がなされます。すなわち、アナログの連続値が一定間隔で取り込まれた飛び飛びの値になります。

普通に考えれば、連続の情報を不連続な飛び飛びの情報に変換すると、明らかに情報量が減るように思われます。すなわち、その飛び飛びの値から、元の連続なはずみのないアナログ値に戻すことができるかという自然な疑問があります。しかし、サンプリング周波数と信号帯域との間である一定の条件を満たせば、アナログとデジタルの間を、はずみなく行き来することができるのです。これをシャノンのサンプリング定理と言います。デジタル信号処理の大前提となるもので、とても重要な関係です。

サンプリング定理では、連続のアナログ信号をインパルス列に変換します。ここでインパルスは、ディラックのデルタ関数といわれるものです。その性質は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \quad \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \text{ のとき}$$

パルスの幅が無限小で面積が1の現実ばなれした信号です。これを使い、サンプリングされた信号 $x^*(t)$ を現してみます。A-D変換器に入力される信号を $x(t)$ とすると(T (秒)はサンプリング間隔)、

$$x^*(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nt) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

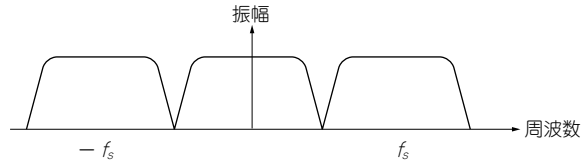


図2-1 スペクトルのコピーが並ぶ

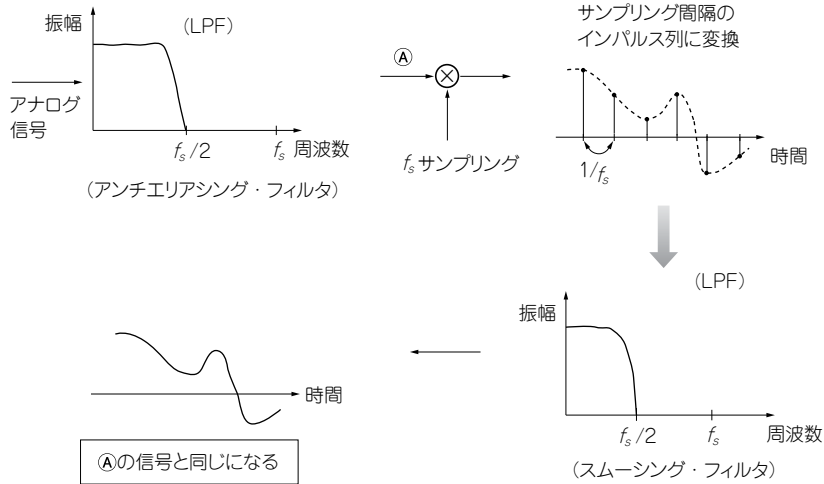


図2-2 サンプリング定理

これをフーリエ変換します。

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n}
 \end{aligned}
 \qquad
 f_s = \frac{1}{T} : \text{サンプリング周波数}$$

ここで、 $X(f)$ の周期性を調べます。サンプリング周波数 f_s の整数倍だけずらしてみます。

$$\begin{aligned}
 x(f+k \cdot f_s) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{f}{f_s} + k\right) n} \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n} \cdot e^{-j2\pi k n} \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n} = X(f)
 \end{aligned}
 \qquad
 k : \text{は整数}$$

したがって、サンプリングされた信号のスペクトルはよく知られたように、図2-1に示すように、

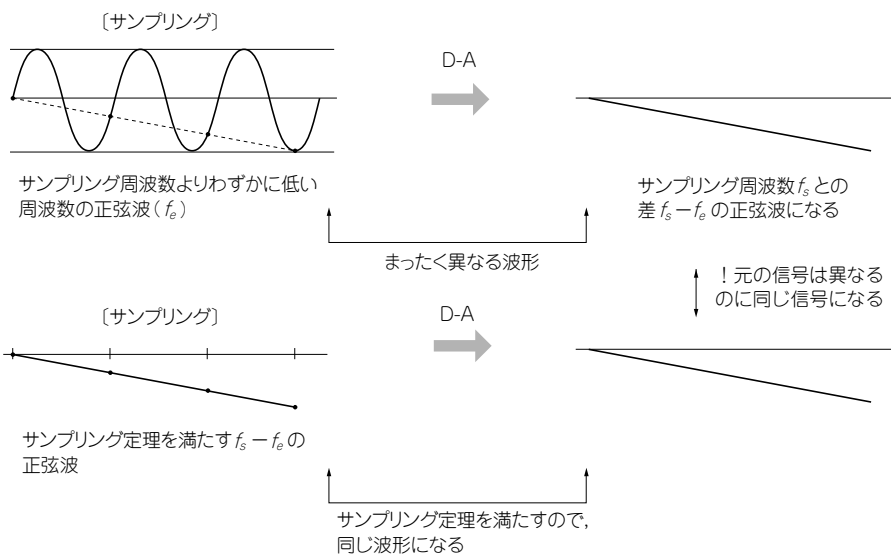


図2-3 偽信号

サンプリング周波数ごとにベース・バンドのスペクトルのコピーが並びます。そのため、ベース・バンドの信号に $f_s/2$ 以上の信号が含まれる場合、コピーと重なってひずんでしまいます。

したがって、アナログ信号をデジタル化するときには、図2-2のようにまず信号にサンプリング周波数の半分以上の周波数成分が含まれないように、アナログ低域(ローパス)フィルタに通します。そのあとA-D変換を行います。このフィルタのことをアンチ・エイリアシング・フィルタと呼んでいます。

すなわち、シャノンのサンプリング定理を満たさない場合はエイリアシングの部分にひずみが発生します。このひずみにより、本来信号には含まれないはずの信号成分が加わります。この信号のことを偽信号と言います。

たとえば簡単な例で考えると、図2-3のように、サンプリング周波数のすぐ近くの信号をサンプリングしたとします。もちろん、これはシャノンのサンプリング定理を満たしません。そうすると、サンプリングした結果は、本来ないはずのとても低い周波数成分の信号があるように見えます。すなわちこれが偽信号です。もし、この低い周波数と同じ成分が入力信号に含まれる場合、偽信号との見分けがつかえません。つまり、このデジタル信号から元のアナログ信号に戻すことができないのは直感的にわかるのではないのでしょうか。

映像信号でもこの偽信号を実感することがよくあります。たとえば映画です。映画は毎秒24コマの映像からなっています。すなわち毎秒24コマの割合でサンプリングされています。もし高速で回転する車輪の映像が写しだされたとき、その回転方向が本来の回転方向と逆回転して見えることを経験したことはあるのではないのでしょうか？これが偽信号です。

また、身近なデジタル・カメラもこの問題を抱えています。図2-4のように拡大するとデジタル