第3章 ディジタル・フーリエ変換(DFT)の基礎

第1部では，正規直交基底とディジタル信号解析(信号分解/合成，自己/相互相関関数など)について，数式が表す物理的な意味を中心に解説した．

ところで，ディジタル信号解析の中心が“フーリエ変換”にあることはよく知られており，

『私たちが物理現象として扱う信号波形は，直流といろいろな周波数の正弦波の寄せ集めである』

と言い表される．つまり，フーリエ変換は周波数成分の混ざりぐあいを調べるために必要となるもっとも重要な数学的手段の一つなのである．

第2部では，ディジタル信号に対するフーリエ変換として，「ディジタル・フーリエ変換(DFT)」を取り上げる．なお，DFTはDiscrete Fourier Transformの頭文字を並べたものであり，一般的には「離散的なフーリエ変換」とよばれているが，本書では意識的に最初の‘D’をDigital(ディジタル)とあえて読み換えている．

まずは手始めに，具体的数値例に基づき，変換式の意味する信号解析結果を読み解く．ディジタル・フーリエ変換の表現方法として実数形式，複素数形式を示し，変換式で計算される信号情報(振幅，位相)について言及する．

3.1 正規直交基底によるディジタル信号解析(実数表現)

本論に入る前に，これまでの内容の再確認という意味から正規直交基底の簡単な問題として 例題1 を，腕試しのつもりで解いてみてもらいたい．

答を導く前に結論をいわせてもらえば，実は「 例題1 の解答そのものが，驚くことなかれ，なんと本章のメイン・テーマである“ディジタル・フーリエ変換(DFT)”を計算していること」に相当するのである．そんなわけで，読者のみなさんには 例題1 の解答作成を通して，正規直交基底とDFTの相互関係の一端を垣間見ていただくことにしよう．

例題1 　ディジタル信号$\{f_0,\ f_1,\ f_2\}=\{5,\ 5,\ -1\}$が，**図3-1**の正規直交基底ベクトルを用いて，

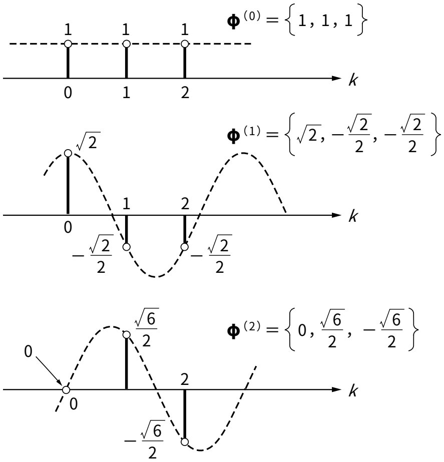

図3-1　正規直交基底ベクトル（N=3の場合）

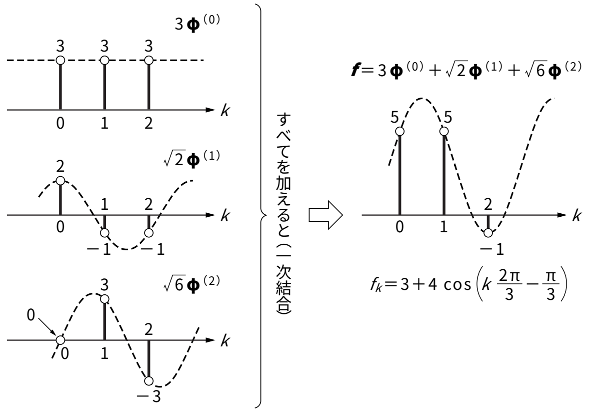

図3-2　正規直交基底ベクトルの一次結合とディジタル信号合成

$$f_k = A + B\cos\left(k\frac{2\pi}{3} + C\right) \quad ;\ k=0,\ 1,\ 2 \quad \cdots\cdots(1)$$

の形で表せたとする．各定数A，B，Cを求めよ．

解答1

図3-1の正規直交基底ベクトルは，以下のとおり．

$\boldsymbol{\phi}^{(0)}=\{1,\ 1,\ 1\}$　（直流に相当）

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \left\{\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

（山と谷が一つずつあるcos波形）

$$\boldsymbol{\phi}^{(2)} = \left\{0,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

（山と谷が一つずつあるsin波形，cos波形を基準として位相がπ/2［rad］遅れている）

よって，正規直交基底ベクトル$\{\boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)}\}$による信号分解の展開係数$\{F_0,\ F_1,\ F_2\}$は，それぞれ内積として，

$$F_0 = \left\langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{\phi}^{(0)} \right\rangle = \frac{1}{3}\left(5+5+(-1)\right) = 3$$

$$F_1 = \left\langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$F_2 = \left\langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)} \right\rangle = \frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$$

と求められる．さらに，得られた展開係数$\{F_0,\ F_1,\ F_2\}$を用いてディジタル信号を一次結合の形で合成すると，

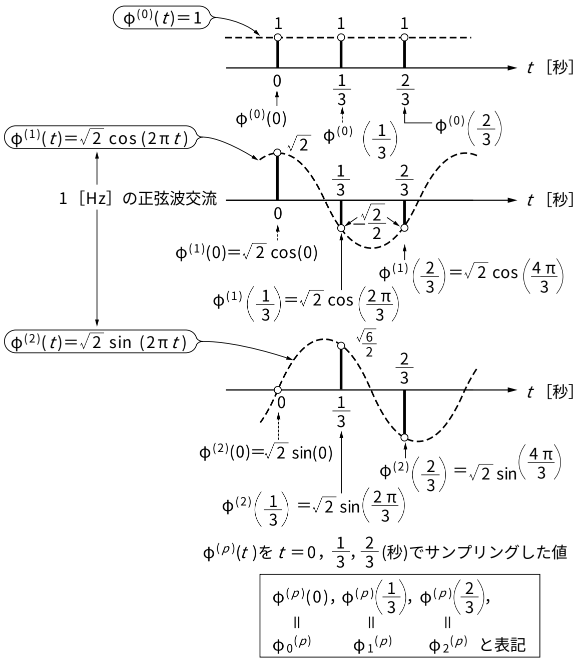

図3-3　アナログ信号と正規直交基底ベクトル（$N=3$の場合）

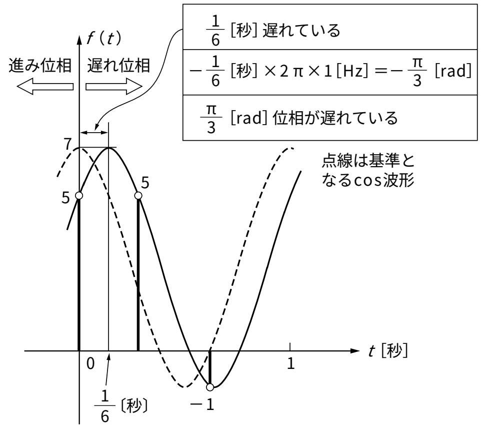

図3-4　ディジタル信号解析に基づく波形情報

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= F_0\boldsymbol{\phi}^{(0)}+F_1\boldsymbol{\phi}^{(1)}+F_2\boldsymbol{\phi}^{(2)} \qquad\cdots\cdots(2)\\
&=3\times\{1,\ 1,\ 1\}+\sqrt{2}\times\left\{\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}+\sqrt{6}\times\left\{0,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}\\
&=\{(3+2+0),\ (3-1+3),\ (3-1-3)\}\\
&=\{5,\ 5,\ -1\}
\end{aligned}
$$

となり，題意のディジタル信号に一致していることが確認できる（**図3-2**）．

ところで，正規直交基底ベクトル$\{\boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)}\}$の各要素は，それぞれ**図3-1**の点線で表したアナログ信号を$T=1/3$［秒］ごとにサンプリングしたディジタル信号を表しているとしよう（**図3-3**）．

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)}=\{\phi_0^{(0)},\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}\}\ ;\ \phi_k^{(0)}=1\ (k=0,\ 1,\ 2) \qquad\cdots\cdots(3)$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\{\phi_0^{(1)},\ \phi_1^{(1)},\ \phi_2^{(1)}\}\ ;\ \phi_k^{(1)}=\sqrt{2}\cos\left\{k\times\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\ (k=0,\ 1,\ 2) \qquad\cdots\cdots(4)$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(2)}=\{\phi_0^{(2)},\ \phi_1^{(2)},\ \phi_2^{(2)}\}\ ;\ \phi_k^{(2)}=\sqrt{2}\sin\left\{k\times\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\ (k=0,\ 1,\ 2) \qquad\cdots\cdots(5)$$

以上の関係に基づき，ディジタル信号$\boldsymbol{f}=\{f_0,\ f_1,\ f_2\}$は，式(2)より$k=0,\ 1,\ 2$として，

$$f_k=F_0\,\phi_k^{(0)}+F_1\,\phi_k^{(1)}+F_2\,\phi_k^{(2)}$$

であることから，式(3)～(5)を代入して，