第2章 正規直交基底とディジタル信号解析

第1章では，「信号数学の準備」と題して，比較的単純で，直感的に理解しやすい信号処理の例示，ディジタル信号のベクトル表現，正規直交基底などの概要を解説して，信号数学の雰囲気を体感してもらった．

本章では，正規直交基底によるディジタル信号分解，合成，相関係数，相互相関関数，自己相関関数など，今後頻繁に登場する数式の物理的な意味，数式の背景となっている考え方を中心に説明する．

まあ，ざっと読んでもらえれば，信号数学の意味するところや背景がつかめ，見た目“複雑そうな”数式も「なあ～んだ，そんなに簡単なことだったんだ」と納得できて，“目からウロコ”という感じになってもらえるのではなかろうか．

2.1 正規直交基底とは

数学的な講釈はさておき，まずはベクトル分解の基本となる正規直交基底を取り上げることにしよう．簡単な例として，4個のサンプル値からなるディジタル信号として，四つの種類を考える(**図2-1**)．ここで点線で示す波形は元のアナログ信号である．

まず，4種類のディジタル信号を4次元ベクトルで表現すると，

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)}=\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\{1,\ 1,\ -1,\ -1\}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(2)}=\{1,\ -1,\ -1,\ 1\}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(3)}=\{1,\ -1,\ 1,\ -1\}$$

となる．手始めに，正規直交基底であることを確かめてみることにしよう(第1章「信号数学の準備」参照)．

最初は「正規性」の確認であるが，これについては各4次元ベクトルのノルム(norm，大きさ)がすべて‘1’であればよい．一般に，N次元ベクトル$\boldsymbol{x}=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1}\}$のノルム$\|\boldsymbol{x}\|$は，次元$N$の大きさに左右されないように，

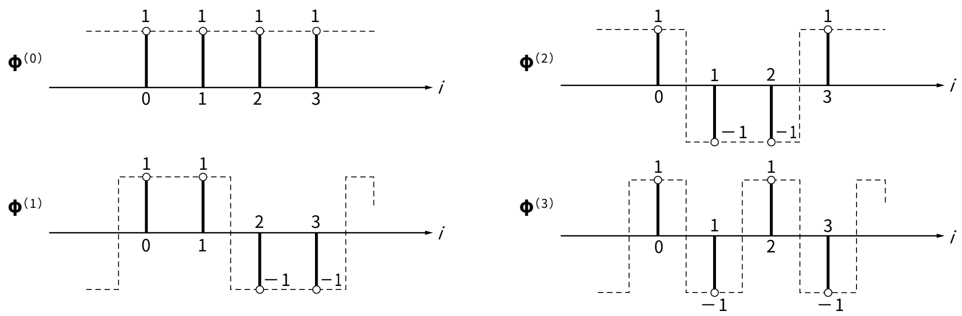

図2-1　正規直交基底の例（N=4）

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\frac{1}{N}\left\{x_0{}^2 + x_1{}^2 + \cdots + x_{N-1}{}^2\right\}} \quad \cdots\cdots(1)$$

あるいは，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2} \quad \cdots\cdots(2)$$

と定義されることが多い．式(1)に基づき，$N=4$として信号ベクトル$\{\boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\phi}^{(1)}, \boldsymbol{\phi}^{(2)}, \boldsymbol{\phi}^{(3)}\}$の各ノルムを計算すると，

$$\left\|\boldsymbol{\phi}^{(0)}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)} = 1$$

$$\left\|\boldsymbol{\phi}^{(1)}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2\right\}} = 1$$

$$\left\|\boldsymbol{\phi}^{(2)}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2\right\}} = 1$$

$$\left\|\boldsymbol{\phi}^{(3)}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2\right\}} = 1$$

となり，すべて‘1’である．つまり，$k=0$，1，2，3に対して，

$$\left\|\boldsymbol{\phi}^{(k)}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{\left(\phi_0^{(k)}\right)^2+\left(\phi_1^{(k)}\right)^2+\left(\phi_2^{(k)}\right)^2+\left(\phi_3^{(k)}\right)^2\right\}} = 1 \quad \cdots\cdots(3)$$

　ただし，$\boldsymbol{\phi}^{(k)} = \{\phi_0{}^{(k)}, \phi_1{}^{(k)}, \phi_2{}^{(k)}, \phi_3{}^{(k)}\}$

となる「正規性」の条件を満たすことがわかる．

　次に，「直交性」であるが，これについては相異なるベクトルの内積を計算して，すべてが‘0’になっていればよい．

　一般に，二つのN次元ベクトル$\boldsymbol{x}=\{x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\}$と$\boldsymbol{y}=\{y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}\}$の内積は，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{N}\left\{x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_{N-1} y_{N-1}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

あるいは，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i \quad \cdots\cdots(5)$$

と定義される．例えば，$\boldsymbol{\phi}^{(0)}$と$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$の内積は，式(4)に基づき，$N=4$とすれば，

$$\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{4}\left\{ \phi_0{}^{(0)} \times \phi_0{}^{(1)} + \phi_1{}^{(0)} \times \phi_1{}^{(1)} + \phi_2{}^{(0)} \times \phi_2{}^{(1)} + \phi_3{}^{(0)} \times \phi_3{}^{(1)} \right\} = \frac{1}{4}\left\{ 1\times1+1\times1+1\times(-1)+1\times(-1) \right\} = 0$$

が得られ，$\boldsymbol{\phi}^{(0)}$と$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$とは「直交」していることになる．他の場合も同様に計算できて，

$$\langle \boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(3)} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(3)} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{\phi}^{(2)},\ \boldsymbol{\phi}^{(3)} \rangle = 0$$

となり，相異なる信号ベクトルの内積がすべて‘0’であることから「直交性」の条件を満たすことがわかる．つまり，k，$m = 0$，1，2，3に対して，

$$\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(k)},\ \phi^{(m)} \right\rangle = \begin{cases} 1\ ;\ k = m \\ 0\ ;\ k \neq m \end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

となる「正規直交条件」が成立する．

以上の結果から，**図2-1**の4種類の信号ベクトル$\{\boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)},\ \boldsymbol{\phi}^{(3)}\}$は「正規性」と「直交性」の二つの条件を同時に満足しているわけで，「正規直交基底」となるのである．事実，**図2-1**は4次のアダマール変換とよばれる正規直交基底であり，画像信号処理などの分野で利用されている．

2.2　正規直交基底によるディジタル信号分解

それでは，4個のサンプル値$\{f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3\}$を有するディジタル信号$\boldsymbol{f}$を，4種類の基本信号（正規直交基底）ベクトル$\{\boldsymbol{\phi}^{(0)},\ \boldsymbol{\phi}^{(1)},\ \boldsymbol{\phi}^{(2)},\ \boldsymbol{\phi}^{(3)}\}$を用いて表してみることにしよう．

そこで，ディジタル信号$\boldsymbol{f}$が仮に，

$$\boldsymbol{f} = F_0\,\boldsymbol{\phi}^{(0)} + F_1\,\boldsymbol{\phi}^{(1)} + F_2\,\boldsymbol{\phi}^{(2)} + F_3\,\boldsymbol{\phi}^{(3)} \quad \cdots\cdots (7)$$

と表されたとき，ディジタル信号と基底ベクトルとの内積を計算してみる．すると，

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle &= \left\langle \left(F_0\boldsymbol{\phi}^{(0)} + F_1\boldsymbol{\phi}^{(1)} + F_2\boldsymbol{\phi}^{(2)} + F_3\boldsymbol{\phi}^{(3)} \right), \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle \\ &= F_0\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle + F_1\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(1)}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle + F_2\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(2)}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle + F_3\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(3)}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle \\ &= F_k\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(k)}, \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle + \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{3} F_m\left\langle \boldsymbol{\phi}^{(m)},\ \boldsymbol{\phi}^{(k)} \right\rangle \end{aligned}$$

と変形でき，式(6)の正規直交条件を適用することにより，

$$F_k = \langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{\phi}^{(k)} \rangle \quad ;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \quad \cdots\cdots (8)$$

となる関係が導かれる．なお，式(7)のように正規直交基底ベクトルの線形結合（一次結合ともいう）の形式でディジタル信号$\boldsymbol{f}$を表すことを，「直交展開する」ともいい，式(8)の数値F_kは「展開係数」とよばれる．この展開係数F_kを求めることが，「ディジタル信号の分解」という物理的な意味を与えることになる．

式(8)によれば，正規直交基底ベクトル$\boldsymbol{\phi}^{(k)}$の成分の大きさF_kは，直交展開したい信号ベクトル$\boldsymbol{f}$と基底ベクトル$\boldsymbol{\phi}^{(k)}$の内積に等しいことがわかる．また，展開係数F_kは信号$\boldsymbol{f}$と基底$\boldsymbol{\phi}^{(k)}$との相関値（類似度）に比例することも，この際ぜひとも覚えておいてほしい（後述）．

以上のように，式(8)がディジタル信号分解のための基本式であり，各基底ベクトルに対する成分