第4章

交流回路はオームの法則プラス複素数

❖

**第3章で位相と複素数について，
交流回路の点から基本的なことを説明しました．
本章では続いて，より一般的な，回路設計現場でよく使われる
回路計算について話を進めていきます．
ここでもオームの法則が回路方程式を制しているのです．**

❖

4-1 交流回路は直流と同じように計算できる

交流回路……というと，なんとなく敷居が高いように感じますが，第3章の最初のとおり，オーディオ回路，ビデオ回路，高周波回路，その他もろもろの電子回路ほぼすべてが，この交流回路です．

日ごろ見ている回路が，オームの法則と複素数で制することができるとわかれば，「少し理論的に回路を攻めてみようか」とも思うのではないでしょうか．

● 交流回路を実効値で計算すれば直流回路と同じになる

▶ 電力を基準に直流と交流の間の違いを「実効値」で吸収する

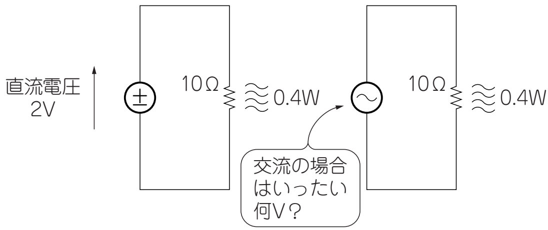
実効値という考えがあります．Root Mean Square，RMS（2乗平均平方根）ともいいます．

基本的には，単純にオームの法則で電圧と電流と抵抗の関係を計算するのであれば，この考えは特にいりません．しかし**電力の計算も含めて**考える場合に，**実効値で考える**からこそ，直流回路と**まったく同じ**に取り扱うことができるのです．

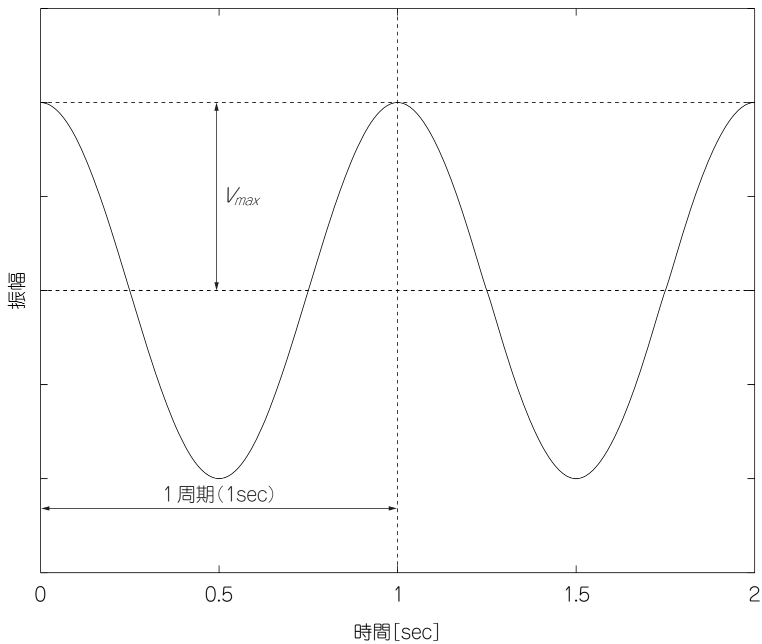
電力 P は，

$$P = \overset{\text{電圧}}{V} \cdot \underset{\text{電流}}{I} = \frac{V^2}{\underset{\text{抵抗}}{R}} = I^2 \cdot R \quad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

になります．ここで R は抵抗自体なので，直流でも交流でもそれ自体の大きさは変



［図 4-1］抵抗に直流電圧を加えた場合と交流電圧を加えた場合で同じ電力を生じさせるには？



（**a**）振幅 V_{max} のコサイン波 $V_{max} \cos(2\pi f t)$

［図 4-2］コサイン波の実効値を考える（$f = 1\mathrm{Hz}$）

わりません．

さて，**図4-1**のように10 Ωの抵抗に直流電圧2Vを加えれば，0.4Wの電力が生じます．ではここで交流の場合は何Vを加えれば，この0.4Wの電力が生じるでしょうか？これを求めるのが**実効値**を用いる理由なのです．

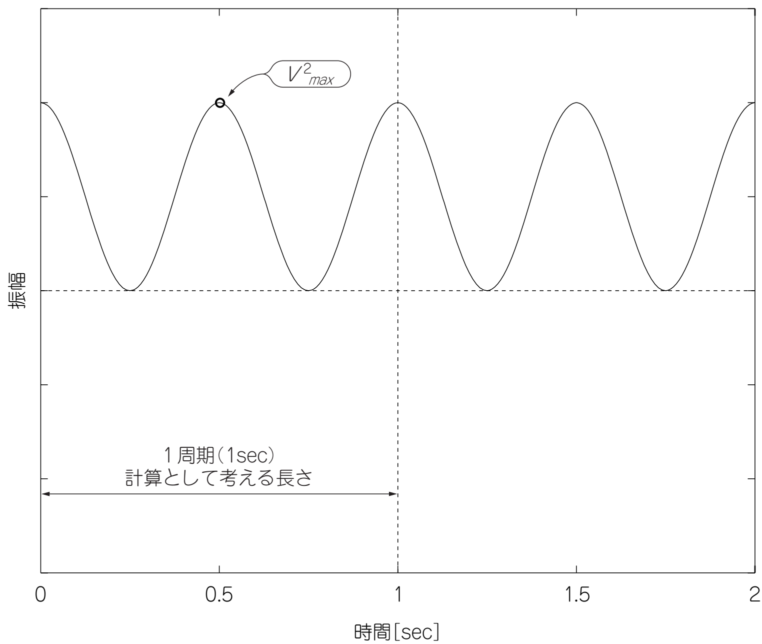
▶ 電圧の場合を例にして考えてみる

ではコサイン波※1で10 Ωの抵抗に何Wが生じるかを，**図4-2**で説明しながら計算してみましょう．

図4-2(a)は振幅 V_{max} のコサイン波 $V_{max}\cos(2\pi ft)$ です．**計算を簡単にするために f = 1Hzとして**おきましょう．先の式(4-1)のように電力を求めるには，この波形のそれぞれの点を「まず2乗」します．この波形が**図4-2**(b)になります．

この波形が抵抗 $R = 10\ \Omega$ に加わります．波形それぞれのポイント(瞬間・瞬間)

※1：ここでも前章および以降の説明との統一を取るため，サイン波ではなくコサイン波として説明する．ところで波形がコサイン波でなく矩形波や三角波のような場合は，以下に説明していくように計算も変わってくるので，実効値の大きさも変わってくる．



(b) (a)を2乗した波形

で抵抗Rに対して熱を生じさせるようになります．直流はいつも一定量が抵抗に加わっていましたが，交流は時間で変化しているので全体を足し合わせて「1秒間の発熱量」つまり電力を求める必要があります．それには，**図4-2(b)**の1周期分※2だけを考えてみればよいことがわかります．

ここでいよいよ**積分計算**を本格的に持ち出さなければなりません．積分は次の第5章で詳しく説明します．積分のわからない方はまずそちらを読んでから，ここに戻ってきてください．

さて，**図4-2(a)**の振幅V_{max}の波形が抵抗Rに加わったようすを式で表してみると，このコサイン波の2乗を1周期分($f=1\text{Hz}$なので0～1secの間)積分したもの※3になるので，

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{R}\times\int_0^1 V_{max}^2\cos^2(2\pi t)\,dt = \frac{1}{R}\times\int_0^1 V_{max}^2\left\{\frac{1+\cos(2\cdot 2\pi t)}{2}\right\}dt \\
&= \frac{1}{R}\times V_{max}^2\cdot\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\cdot 2\pi t)}{2\cdot 2\pi}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{R}\times V_{max}^2\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\cdot 2\pi)}{4\pi}}_{\text{ゼロ}}\right)-\left(\underbrace{\frac{0}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\cdot 0)}{4\pi}}_{\text{ゼロ}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{R}\times\frac{V_{max}^2}{2} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}2)
\end{aligned}
$$

となります．$\int$とdtの間が**図4-2(b)**の波形を表しています．ここでの複雑な積分計算や，$\cos^2$の変換計算はまだわからなくてかまいません．知っておいてもらいたいのは，結果が$P=V_{max}^2/2R$になることです．

▶ 長々説明したが結論は

ここで$P=V_{DC}^2/R$として直流回路で考えた場合と比較し，振幅V_{max}のコサイン波が加わったときに同じ電力を生じる，直流電圧相当の$V_{RMS}(=V_{DC})$はどれだけかと計算すれば，

$$
P=\frac{V_{max}^2}{2R}=\frac{V_{RMS}^2}{R}\left(=\frac{V_{DC}^2}{R}\right)
$$

なので，$V_{RMS}=V_{max}/\sqrt{2}$になることがわかります．このようにしておけば，**電力の**

※2：実際は1/2周期ずつ同じ波形が繰り返されているので1/2周期ぶんで十分．
※3：周波数がfの場合は1secに換算するため結果をf倍する必要あり．周期$T(=1/f)$で考えれば$1/T$倍．

計算も含めて直流回路の計算とまったく同じにすることができるのです．この$V_{RMS} = V_{max}/\sqrt{2}$を**実効値**といいます．

つまりさきの10 Ωの抵抗に0.4Wの電力を生じさせるには，直流電圧だと$V_{DC} =$ 2V，コサイン波だと$V_{max} = 2 \times \sqrt{2}$ Vの電圧を加えればよいことがわかりますね．

なお，以降で説明するように，波形がコサイン波でなく三角波や矩形波のような場合は，計算も変わってくるため，実効値の大きさ（V_{RMS}とV_{max}の関係）も変わってくるので注意が必要です．

【まとめ：コサイン波の実効値は$V_{RMS} = \dfrac{V_{max}}{\sqrt{2}}$】

ちょっとアドバンス

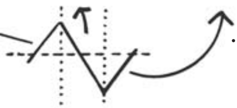
● 波形がサイン波以外の場合の実効値

ここまでの説明は波形がサイン波（コサイン波）の場合についてでした．たとえば三角波とか矩形波がどうなるか計算してみましょう※4．

▶ まずは三角波

図4-3は三角波の波形です．ここでも計算を簡単にするために$f = 1$Hzとします．さらに式の中では$R = 1\ \Omega$，$V_{max} = 1$Vとし，$R \times V_{max}^2 = 1$としてしまいます．1周期が1secですので電圧の変化の傾きは4になり，計算してみると，

$$
\begin{aligned}
P &= 4^2\left\{\int_0^{0.25} t^2 dt + \int_{0.25}^{0.75} (-t+0.5)^2 dt + \int_{0.75}^{1} (t-1)^2 dt\right\} \\
&= 4^2\left\{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{0.25} + \left[-\frac{1}{3}(-t+0.5)^3\right]_{0.25}^{0.75} + \left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_{0.75}^{1}\right\} \\
&= 4^2\frac{4}{3}(0.25)^3 = \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots (4\text{-}3)
\end{aligned}
$$



つまり$P = V_{max}^2/3R$となり，実効値V_{RMS}は$V_{RMS} = V_{max}/\sqrt{3}$になります．コサイン波の場合とは振幅と実効値の関係が違いますね．

【まとめ：三角波の実効値は$V_{RMS} = \dfrac{V_{max}}{\sqrt{3}}$】

※4：ひずみ波も含めて，このような正弦波形状ではない信号の電力を計算するには，信号をフーリエ級数に展開し，それぞれの項の電力を計算したうえで足し合わせる．

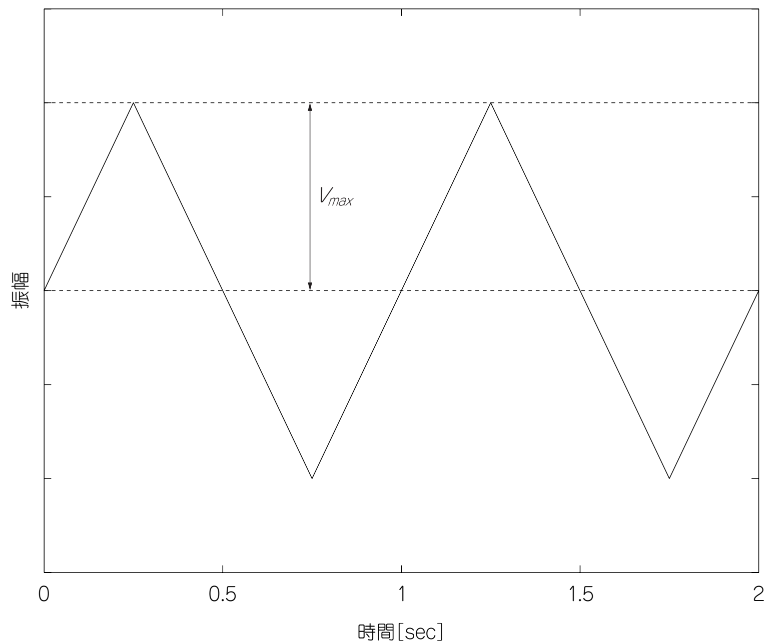
▶ **つぎは矩形波**

矩形波はもっと簡単です．ここでも $f=1\mathrm{Hz}$，$R=1\,\Omega$，$V_{max}=1\mathrm{V}$ とします．計算してみると，

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{0.5} 1^2 dt + \int_{0.5}^{1} (-1)^2 dt \\ &= \Big[t\Big]_0^{0.5} + \Big[t\Big]_{0.5}^{1} = 1 \end{aligned} \tag{4-4}$$

なんですね．振幅 V_{max} がそのまま実効値になるのです．

【まとめ：矩形波の実効値は $V_{RMS}=V_{max}$】



（a）振幅 V_{max} の三角波

［図 4-3］三角波の実効値を考える（$f=1\mathrm{Hz}$）

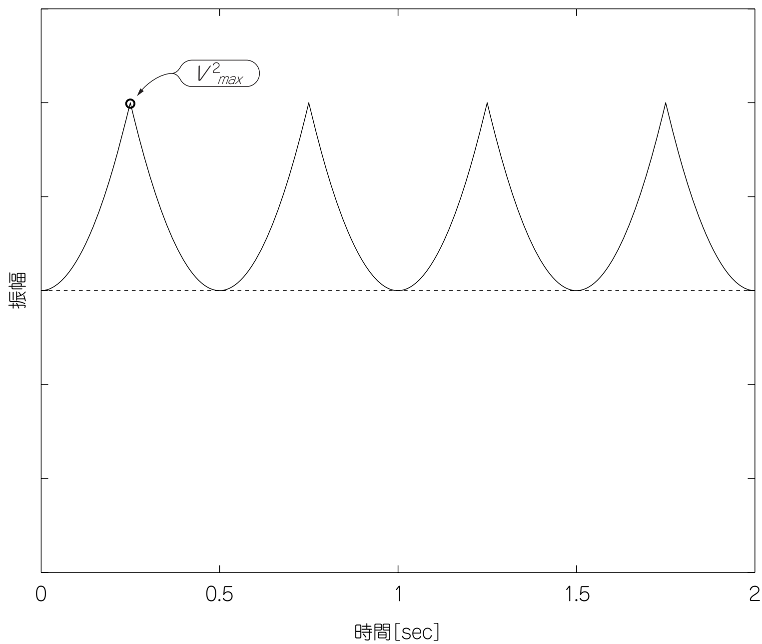
ちょっとアドバンス

● 実効値以外での値の表し方

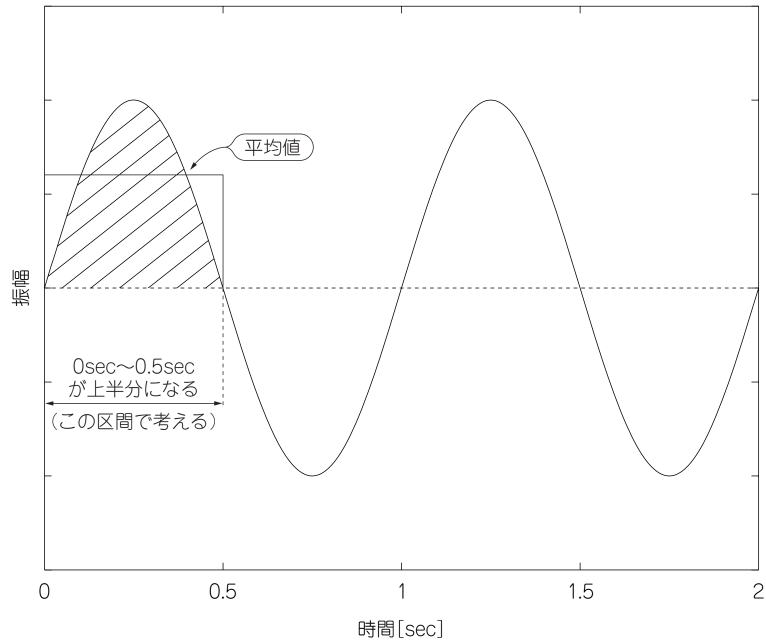
実効値以外にも**平均値**という表し方があります．平均値は波形の半周期の平均を計算するものです．コサイン波，三角波の実効値が異なるように，波形形状により平均値もそれぞれ異なります．

▶ 平均値を計算する

まずサイン波の平均値 V_{Avr} を計算してみましょう．ここでは振幅 V_{max} のサイン波 $V_{max}\sin(2\pi ft)$ とし，簡単にするために $V_{max}=1\text{V}$，$f=1\text{Hz}$ とします．ここでコサイン波としていないのは，サイン波だと**図4-4**のように，時間0sec～0.5secが波形の上半分になり計算が楽だからです．とはいえサイン波とコサイン波は位相が90°違うだけで，本来は同じものなので得られる結果は同じです．



(b) (a)を2乗した波形



［図4-4］平均値計算でsinを使う理由と平均値計算の考え方

ここで波形を半周期分の時間で積分するため，1/0.5と積分する時間の逆数を掛けます※5．1周期の平均をとるとゼロになってしまうので，時間0sec〜0.5secの上半分だけで考えます．

$$V_{Avr}=\frac{1}{0.5}\int_0^{0.5}\sin(2\pi t)\,dt=2\cdot\frac{1}{2\pi}\Big[-\cos(2\pi t)\Big]_0^{0.5}$$

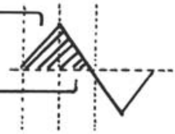
$$=\frac{1}{\pi}\cdot -1\cdot\{\cos(\pi)-\cos(0)\}=\frac{1}{\pi}\cdot -1\cdot(-1-1)=\frac{2}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}5)$$

【まとめ：サイン波の平均値は$V_{Avr}=\dfrac{2V_{max}}{\pi}$】

次に三角波の平均値を計算してみましょう．**図4-3**の波形と同じもの，かつ簡単

※5：1/0.5＝2であるため，半周期を積分したものの2倍，つまり1周期相当になる．逆に1周期すべてを平均（積分）するとゼロになる．抵抗とコンデンサで平均化回路を作ってその出力を測れば同じくゼロになるのは当然である．本来の平均値はゼロではあるが，ここでは**半周期のみ**で考えて，その平均を取っているので注意すること（そのため半サイクル平均値とも呼ぶ）．

にするために $V_{max}=1\text{V}$，$f=1\text{Hz}$ とします．



$$V_{Avr}=\frac{1}{0.5}\left\{\int_0^{0.25}4t\,dt+\int_{0.25}^{0.5}4(-t+0.5)\,dt\right\}$$
$$=\frac{1}{0.5}\left\{\left[\frac{4}{2}t^2\right]_0^{0.25}+\left[-\frac{4}{2}(-t+0.5)^2\right]_{0.25}^{0.5}\right\}$$
$$=\frac{1}{0.5}\frac{4}{2}\{(0.25^2-0)+(0+0.25^2)\}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(4\text{-}6)$$

【まとめ：三角波の平均値は$V_{Avr}=\dfrac{V_{max}}{2}$】

計算は省略しますが……，

【まとめ：矩形波の平均値は $V_{Avr}=V_{max}$】

▶ 実効値/平均値/波形率/波高率

波形率とか波高率（クレスト・ファクタとも呼ばれる）という比率の考え方があります．それぞれ以下で表されます．なお振幅は**尖頭値**とも呼ばれます．

$$波形率=\frac{実効値}{平均値}$$

$$波高率=\frac{尖頭値}{実効値}\quad（クレスト・ファクタ）$$

表4-1 にサイン波と三角波の振幅（尖頭値）/実効値/平均値/波形率/波高率の関係

［表4-1］振幅（尖頭値）/実効値/平均値/波形率/波高率の関係

	サイン波	三角波
振幅（尖頭値）	V_{max}	V_{max}
実効値	$\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$	$\frac{V_{max}}{\sqrt{3}}$
平均値	$\frac{2V_{max}}{\pi}$	$\frac{V_{max}}{2}$
波形率	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
波高率	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

を示しておきます．

● 位相を複素数で表せば，オームの法則で交流回路地帯もすべて制圧

▶ 実効値で考えれば残るは位相

ここまでの説明のように，オームの法則は交流回路でも同じように取り扱えます．このポイントは

- 実効値で考える
- 複素数で位相を考える

のたった2点だけだといえます．とくに位相については第3章で説明したように，たとえば $e^{j\theta}$，$+j$，$-j$ など複素数で位相のズレを表せばよいということです．

「これでオームの法則により交流回路をすべて表せる」と言い切っても良いくらい，このポイントは大切かつ，基本的かつ……，とてもシンプルなことがらなのです．

あとは直流回路と同じように式を立てればよいのです．

● 基本的かつ必要な複素数計算ハウツー

オームの法則を用いたいろいろな回路構成の計算を，より詳細に次の節で説明していきます．ここでの計算は以下に示すような，複素数計算における「ハウツー」が必要です．これらの計算の仕方をベースにして考えていけばよいし，ほぼすべてがこのハウツーで計算できます．

▶ 基本公式

第3章3-3で挙げたものを再掲します．

$$A(B+jC)=AB+jAC$$

$$(A+jB)+(C+jD)=(A+C)+j(B+D)$$

$$\begin{aligned}(A+jB)\times(C+jD)&=(AC+jB\times jD)+(jB\times C+A\times jD)\\&=(AC-BD)+j(BC+AD)\end{aligned}$$

$$j\times j=-1$$

▶ オイラーの公式に関係する基本公式

ここはとても大事なので別立てにしました．